Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

POZIOM ROZSZERZONY

23 marca 2024

Czas pracy: 180 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

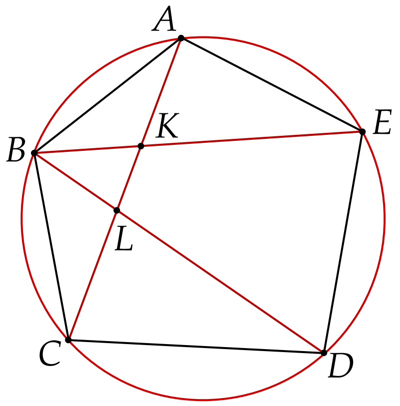
Rozwiąż nierówność $\left|x+\frac{2}{3}\right|+\left|\frac{3}{2}x+1\right| \leqslant 10$.

ZADANIE 2 (2 PKT)

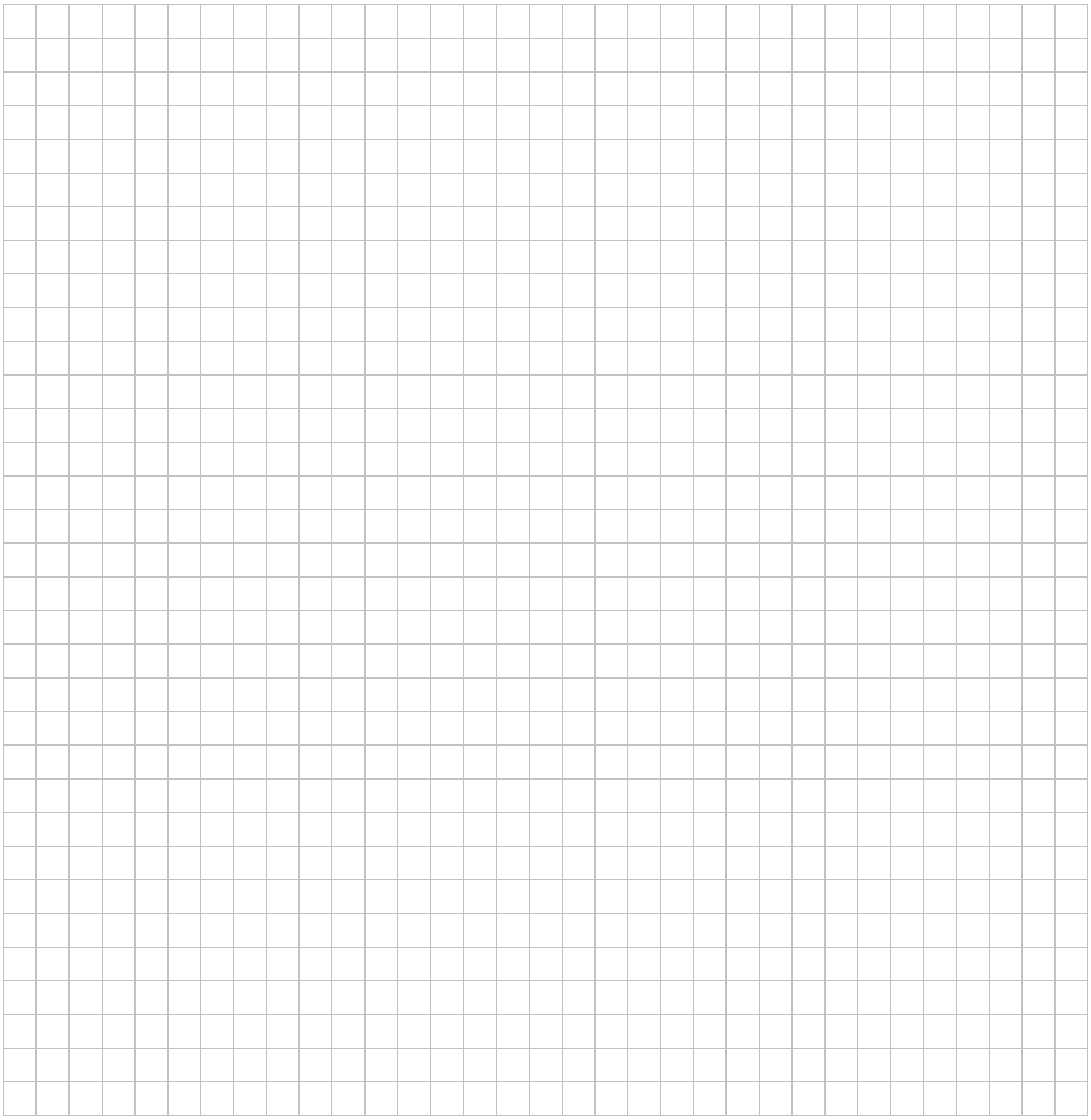
Oblicz granicę funkcji $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

ZADANIE 3 (3 PKT)

Pięciokąt $ABCDE$ jest wpisany w okrąg. Przekątne BD i BE tego pięciokąta przecinają przekątną AC w punktach L i K odpowiednio (zobacz rysunek).



Udowodnij, że jeżeli punkty K, L, D i E leżą na jednym okręgu, to $|AB| = |BC|$.



ZADANIE 4 (3 PKT)

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x + y = 3$ i nierówność

$$x^3 + 4y^3 \leqslant 3x^2y.$$

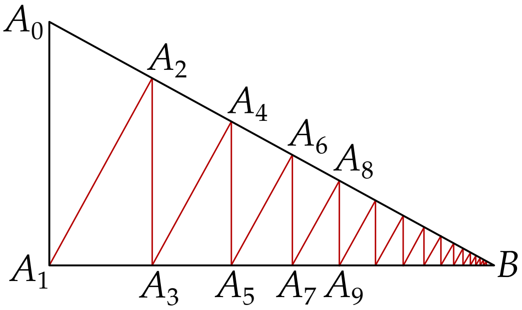
Wykaż, że $x = 2$ oraz $y = 1$.

Zadanie 5 (3 pkt)

Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii sieci ciepłowniczej na pewnym osiedlu mieszkaniowym w godzinach porannych pojedynczego dnia jest równe 0,4. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w okresie dziesięciu dni wystąpi 6, 7 lub 8 awarii tej sieci na tym osiedlu w godzinach porannych. Wynik podaj w ułamku dziesiętnym w zaokrągleniu do części setnych.

ZADANIE 6 (4 PKT)

W trójkącie A_0A_1B kąt A_0A_1B jest prosty, $|A_0A_1| = 12$ i $|A_1B| = 5\sqrt{6}$. Odcinek A_1A_2 jest wysokością tego trójkąta, odcinek A_2A_3 jest wysokością trójkąta A_1A_2B, odcinek A_3A_4 jest wysokością trójkąta A_2A_3B itd. Ogólnie, dla każdej liczby naturalnej $i \geqslant 1$, odcinek A_iA_{i+1} jest wysokością trójkąta $A_{i-1}A_iB$



Oblicz długość nieskończonej łamanej $A_1A_2A_3A_4\ldots$.

ZADANIE 7 (3 PKT)

Wyznacz wszystkie styczne do wykresu funkcji $f(x) = \frac{8x+1}{x-3}$, które razem z osiami układu współrzędnych ograniczają trójkąt równoramienny.

ZADANIE 8 (4 PKT)

Czworokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 18$ i $|CD| = 26$, jest opisany na okręgu. Kąt ABC tego czworokąta jest rozwarty, a promień okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równy 12,5. Obwód czworokąta $ABCD$ jest równy 66. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

ZADANIE 9 (5 PKT)

Oblicz sumę wszystkich rozwiązań równania

$$2\sin^3 x + \cos x \cos 2x = \sin x,$$

które należą do przedziału $[-8\pi, 24\pi]$.

ZADANIE 10 (5 PKT)

W okrąg o równaniu $(x-5)^2+(y+3)^2=50$ wpisano trójkąt ostrokątny ABC. Bok AB tego trójkąta jest zawarty w prostej o równaniu $x-3y-4=0$. Wysokość CD tego trójkąta dzieli bok AB tak, że $|AD|=3\cdot|DB|$. Oblicz pole trójkąta ABC.

Zadanie 11 (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości $m \in \mathbb{R}$, dla których równanie $x^2 - mx + 4m - 12 = 0$ ma dwa różne pierwiastki spełniające nierówność

$$x_1^4 + x_2^4 \geqslant 452 - 16m^3 - 192m.$$

ZADANIE 12 (5 PKT)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x)=4^{\log_{\sqrt{2}} x}+\frac{4\cdot\log_3\sqrt{8}\cdot\log_{0,5}\sqrt{27}}{3}\cdot x^2-90x$$

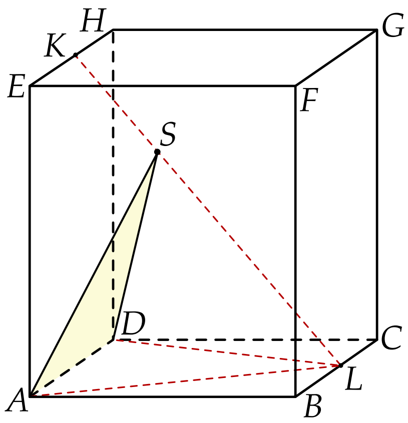
dla każdej liczby dodatniej x.

a) Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x wzór funkcji f można równoważnie przekształcić do postaci $f(x)=x^4-3x^2-90x$.

b) Oblicz najmniejszą wartość funkcji f określonej dla każdej liczby dodatniej x.

ZADANIE 13 (6 PKT)

Punkty K i L są środkami odpowiednio krawędzi EH i BC prostopadłościanu $ABCDEFGH$. Przez krawędź AD poprowadzono płaszczyznę, która jest nachylona do płaszczyzny podstawy po kątem 75° i płaszczyzna ta przecięła odcinek KL w punkcie S (zobacz rysunek).



Oblicz pole trójkąta ASD jeżeli $|KL| = 16$, $\operatorname{tg}\measuredangle ALD = \frac{24}{7}$ i $|AB| = 8$.