PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

16 MARCA 2024

CZAS PRACY: 180 MINUT

Zadanie 1 (3 pkt)

Jacek ustawia n książek na półce. Wśród tych książek są dokładnie 3 książki historyczne. Liczba wszystkich możliwych ustawień tych książek jest 117 razy większa od liczby wszystkich takich ustawień, w których książki historyczne stoją obok siebie (w dowolnej kolejności). Oblicz n.

Informacja do zadań 2.1 i 2.2

Dany jest wielomian $W(x) = 5x^8 + 8x^5$ określony dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

ZADANIE 2.1 (2 PKT)

Wykaż, równanie $W(x) + 4 = 0$ nie ma rozwiązań rzeczywistych.

Zadanie 2.2 (4 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$W\left(\frac{|x|}{1+|x|}\right) = m$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste.

ZADANIE 3 (3 PKT)

Wykaż, że

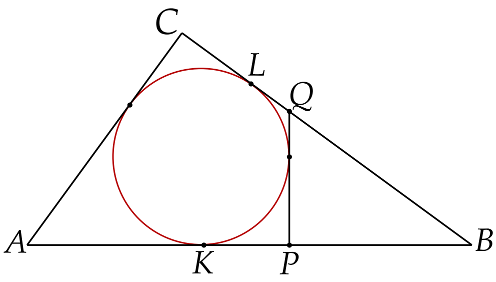
$$\frac{1-\cos\frac{3\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{5}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}}.$$

ZADANIE 4 (3 PKT)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{3x^2-13x-27}{x^3+4x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Prosta $y = -1$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie P. Wyznacz współrzędne punktu P.

ZADANIE 5 (3 PKT)

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB i BC w punktach K i L odpowiednio. Na bokach AB i BC tego trójkąta wybrano punkty P i Q w ten sposób, że odcinek PQ jest styczny do okręgu wpisanego w trójkąt ABC (zobacz rysunek).



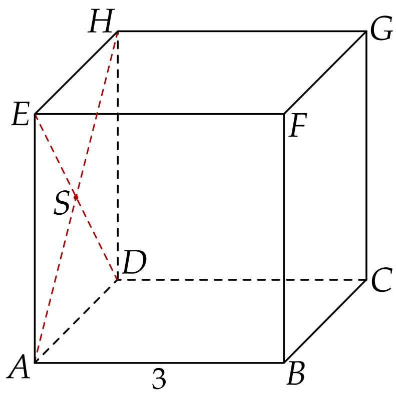
Wykaż, że jeżeli $|AP| = |AC|$, $8 \cdot |BC| = 17 \cdot |PB|$ i $3 \cdot |BK| = 25 \cdot |LQ|$, to trójkąt BPQ jest rozwartokątny.

ZADANIE 6 (4 PKT)

Długości boków trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Obwód trójkąta jest równy 33, a cosinus największego kąta jest równy $\frac{1}{6}$. Oblicz promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

ZADANIE 7 (3 PKT)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 3. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych AH i DE ściany bocznej $ADHE$ (zobacz rysunek).



Oblicz wysokość trójkąta BSG poprowadzoną z punktu B na bok SG tego trójkąta.

ZADANIE 8 (4 PKT)

Ośmiokrotnie rzucamy sześcienną kostką do gry. Wśród otrzymanych wyników jest dokładnie 5 piątek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ostatnim rzucie otrzymaliśmy piątkę?

Zadanie 9 (5 pkt)

Ciąg (a, b, c) jest trzywyrazowym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Ciąg

$$(4a, 3b, c + 12)$$

jest trzywyrazowym ciągiem arytmetycznym. Ponadto, spełniony jest warunek $c - b = 36$. Oblicz a, b oraz c.

ZADANIE 10 (5 PKT)

W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (-3, -3)$, $B = (9, 1)$ i $C = (8, -6)$. Wyznacz wszystkie punkty D prostej AB, które są różne od punktów A i B, i dla których suma pól trójkątów ADC i BDC jest mniejsza od 120.

ZADANIE 11 (5 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(m+2)x^2 - (m-2)x - 4 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunek:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 \geqslant \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

ZADANIE 12 (6 PKT)

Boki AB i BC prostokąta $ABCD$ mają długości m^2 i m odpowiednio, gdzie m jest ustaloną dodatnią liczbą rzeczywistą. Na bokach AB i AD wybrano odpowiednio punkty E i F w ten sposób, że $|AE| = |DF|^2$. Oblicz dla jakiej długości odcinka AE pole trójkąta ECF jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.