Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

poziom rozszerzony

29 kwietnia 2023

Czas pracy: 180 minut

ZADANIE 1 (2 PKT)

Dane są liczby rzeczywiste a i b takie, że $3^a = 7$ i $7^b = 3$. Wykaż, ze

$$a^3 + b^3 = (a + b - \sqrt{3})(a + b)(a + b + \sqrt{3}).$$

Informacja do zadań 2.1 i 2.2

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^4+16}{x^2+4}$ określona dla $x \in \mathbb{R}$.

ZADANIE 2.1 (2 PKT)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x, spełniona jest nierówność $f(x) \geqslant 2x$.

Zadanie 2.2 (2 pkt)

Wyznacz równania stycznych do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punktach o rzędnej $y = 4$.

ZADANIE 3 (3 PKT)

Maszyna napełnia butelki wodą, przy czym każda butelka ma zostać napełniona wodą do 750 ml objętości. Prawdopodobieństwo tego, że butelka zostanie napełniona prawidłowo wynosi 97%. Kontroli poddano partię 30 butelek napełnionych przez tę maszynę danego dnia. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród tych 30 losowo wybranych butelek znajdą się co najwyżej dwie butelki, które nie zostały prawidłowo napełnione.

Zadanie 4 (3 pkt)

Pole trójkąta ostrokątnego o bokach 40 i 29 jest równe 420. Oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 5 (5 pkt)

Trapez równoramienny o przekątnej długości d i ramieniu długości c jest opisany na okręgu. Wykaż, że odległość środka okręgu wpisanego w ten trapez od końca krótszej podstawy jest równa $\frac{1}{2}\sqrt{2c^2-2c\sqrt{2c^2-d^2}}$.

Zadanie 6 (4 pkt)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geqslant 1$, w którym $a_1 > 0$. Suma S wszystkich wyrazów tego ciągu jest skończona i spełnia nierówność $27S \leqslant 256a_4$. Wyznacz iloraz tego ciągu.

Zadanie 7 (4 pkt)

Rozwiąż równanie $\sin(4x) + \sqrt{3}\cos(4x) + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Zadanie 8 (6 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(x-3)[x^2+(m-9)x+m^2-m+16]=0$$

ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 oraz x_3, spełniające warunek

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3m - 22.$$

ZADANIE 9 (6 PKT)

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest równoległobok $ABCD$ o przekątnej długości $6\sqrt{89}$ i bokach długości 32 i 34. Pole powierzchni bocznej jednej ze ścian bocznych ostrosłupa jest mniejsze od pola powierzchni sąsiedniej ściany bocznej i jest równe 1808. Spodek wysokości ostrosłupa pokrywa się z punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$, a jego ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Oblicz długość krótszej z krawędzi bocznych ostrosłupa $ABCDS$.

ZADANIE 10 (7 PKT)

Maksymalny zbiór, na którym funkcja rzeczywista

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - ax^2 - a^2x + 35}$$

jest rosnąca jest jedyny i jest niepustym przedziałem postaci $\left(-b^2, \frac{2}{3}b\right)$, dla pewnej liczby całkowitej b. Wyznacz dziedzinę funkcji f oraz jej największą wartość na przedziale $[-2, 3]$.

ZADANIE 11 (6 PKT)

Prosta o równaniu $y + x - 7 = 0$ zawiera jedną z dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta ABC, w którym $A = (1, -6)$ i $B = (3, 8)$. Oblicz pole tego trójkąta.