Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

poziom rozszerzony

1 kwietnia 2023

Czas pracy: 180 minut

ZADANIE 1 (3 PKT)

Dane są liczby $a = \log_3 2$ oraz $b = \log_2 5$. Wyraź $\log_9 125$ za pomocą a oraz b.

Informacja do zadań 2.1 i 2.2

Funkcja f określona jest wzorem

$$f(x) = \left| \frac{1}{3}(x+2)^2 \left(x - \frac{11}{2} \right) \right|$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Pochodna funkcji f w punkcie $x = 3$ jest równa 0.

Zadanie 2.1 (3 pkt)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości, jakie funkcja przyjmuje na przedziale $[-4, 4]$.

Zadanie 2.2 (4 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = \frac{1}{3} + |m+1|$ ma cztery rozwiązania, których iloczyn jest ujemny.

Zadanie 3 (2 pkt)

Dane są dwie urny z kulami. W każdej z urn jest siedem kul. W pierwszej urnie są trzy kule czarne i cztery kule białe, w drugiej urnie są dwie kule czarne i pięć białych. Rzucamy jeden raz symetryczną monetą. Jeżeli wypadnie reszka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym przypadku – jedną kulę z drugiej urny. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tym doświadczeniu wylosujemy kulę białą.

Zadanie 4 (3 pkt)

Udowodnij, że różnica sześcianów dwóch kolejnych liczb całkowitych nie jest liczbą podzielną przez 5.

Zadanie 5 (3 pkt)

Rozwiąż nierówność

$$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots \leqslant 2,$$

gdzie lewa strona jest sumą zbieżnego szeregu geometrycznego.

ZADANIE 6 (6 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \in \mathbb{R}$, dla których równanie

$$m^2x^2 + (m^3 - 3m^2)x - 3m^3 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2 spełniające warunek

$$\frac{x_1^3x_2 + x_1x_2^3}{x_1 + x_2} \leqslant \frac{15}{2}.$$

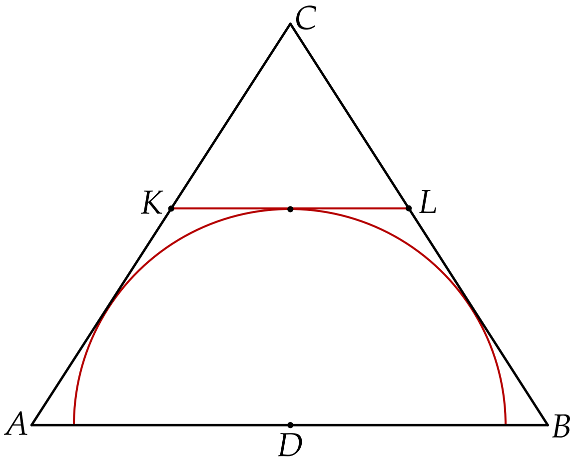
ZADANIE 7 (4 PKT)

Rozwiąż równanie

$$6\cos x + 2\sqrt{3}\sin x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} + \sqrt{3} = 0.$$

Zadanie 8 (3 pkt)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$, a punkt D jest środkiem podstawy AB. Okrąg o środku D jest styczny do prostej AC. Punkt K leży na boku AC, punkt L leży na boku BC, odcinek KL jest styczny do rozważanego okręgu oraz $|AK| = |BL| = |KC|$ (zobacz rysunek).



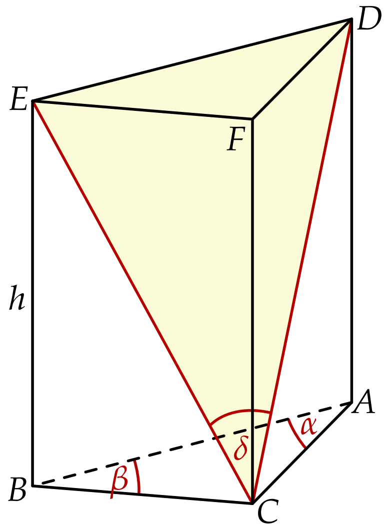
Wykaż, że trójkąt ABC jest równoboczny.

Zadanie 9 (6 pkt)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) punkt $C=(7,-2)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC. Prosta k o równaniu $y+2x+3=0$ zawiera dwusieczną kąta BAC tego trójkąta. Okrąg O o równaniu $(x+1)^2+(y+1)^2=16$ jest wpisany w ten trójkąt. Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B trójkąta ABC.

ZADANIE 10 (6 PKT)

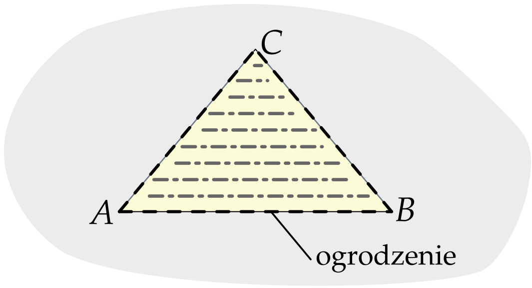
Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEF$, którego podstawą jest trójkąt ABC o kątach $|\measuredangle CAB| = \alpha$ i $|\measuredangle CBA| = \beta$. Przekątne CE i CD ścian bocznych tworzą kąt o mierze δ takiej, że $\operatorname{tg}\delta = \frac{40}{9}$ (zobacz rysunek).



Pole trójkąta CED jest równe 4, a pole trójkąta CBA jest równe $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$. Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.

ZADANIE 11 (7 PKT)

Budżet przeznaczony na ogrodzenie pewnej działki w kształcie trójkąta równoramiennego ABC ($|AC| = |BC|$) wynosi 12 000 zł.



Ze względu na warunki terenowe, koszt wykonania 1 metra bieżącego ogrodzenia jest różny dla każdego z boków trójkąta ABC i wynosi odpowiednio: 140 zł dla boku AC, 100 zł dla boku BC i 360 zł dla boku AB. Oblicz jakie powinny być wymiary ogrodzenia, aby odgradzało ono działkę o największym możliwym polu powierzchni. Wymiary podaj z dokładnością do 1 metra.