CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD | PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **E-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2015*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
EMAP-R0-**100**-2306

DATA: **2 czerwca 2023 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **14:00**
CZAS TRWANIA: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

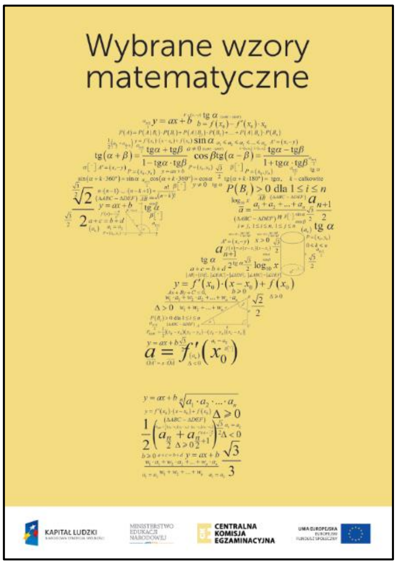
Uprawnienia zdającego do:
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 32 strony (zadania 1–15). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
4. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Wartość wyrażenia $\log_{\sqrt{2}} 3 \cdot \log_{\sqrt{3}} 2$ jest równa

A. $\frac{1}{4}$ **B.** 3^2 **C.** 2^3 **D.** 4

Zadanie 2. (0–1)

Dany jest trójkąt o bokach długości $4, 5$ oraz 6. Cosinus największego kąta wewnętrznego tego trójkąta jest równy

A. $\frac{1}{8}$ **B.** $\frac{9}{16}$ **C.** $\frac{3}{4}$ **D.** $\left(-\frac{3}{4}\right)$

Zadanie 3. (0–1)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 7$ przez dwumian $x + 2$ jest równa

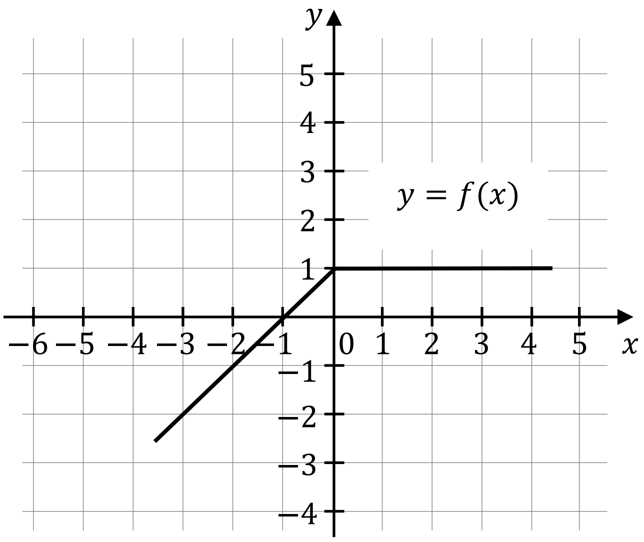
A. (-63) **B.** (-39) **C.** 25 **D.** 41

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 4. (0–1)

Funkcja f jest określona dla każdej liczby rzeczywistej x. Fragment wykresu funkcji f przedstawiono na rysunku 1.

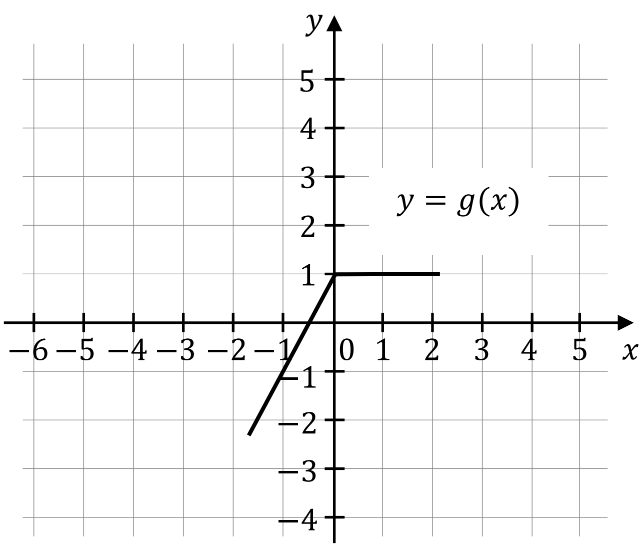
Rysunek 1.



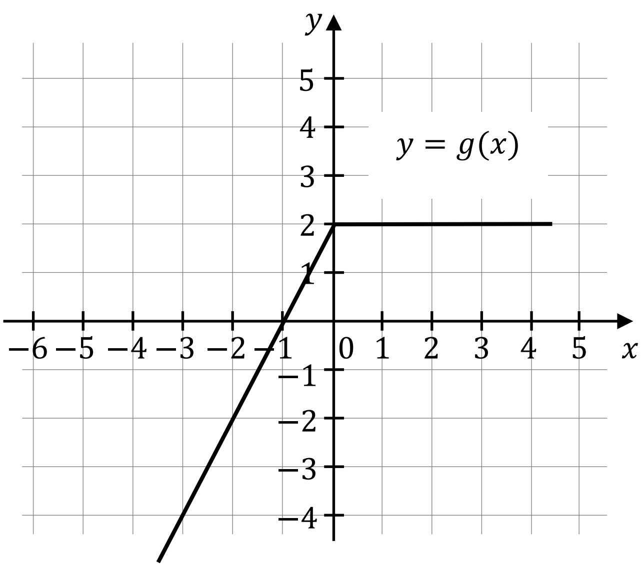
Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ dla każdej liczby rzeczywistej x.
Na jednym z rysunków A–D przedstawiono fragment wykresu funkcji g.

Fragment wykresu funkcji g przedstawia

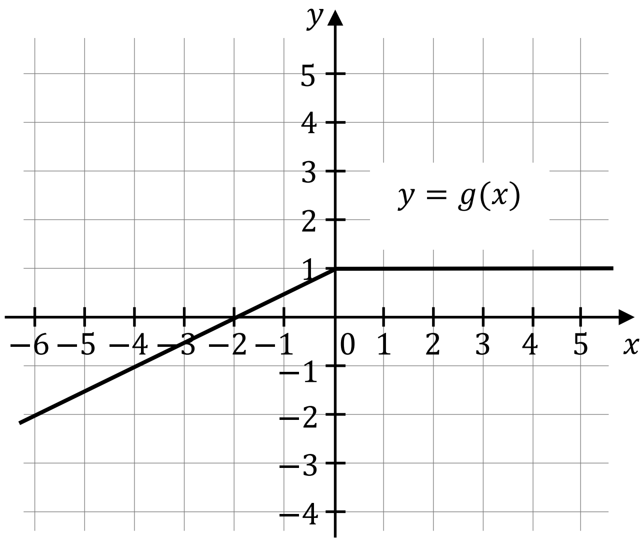
A. Rysunek A.



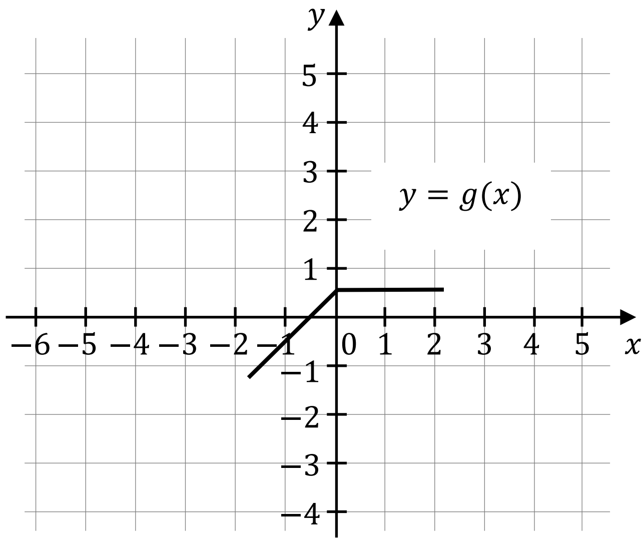
B. Rysunek B.



C. Rysunek C.



D. Rysunek D.



BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 5. (0–2)

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 - 2n + 1}{3n^3 - n^2 - 2n + 3}$$

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 6. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
Punkt $P = (x_0, 18)$ należy do wykresu funkcji f.
Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.

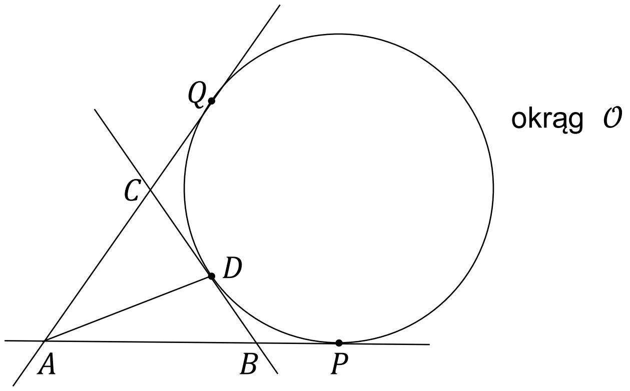
Zadanie 7. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + \frac{16}{a} \geq 12$$

Zadanie 8. (0–3)

Dany jest okrąg $\mathcal{O}$. Przez punkt A poprowadzono dwie proste, które są styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – P oraz Q. Przez punkt B leżący na odcinku AP poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie D, która przecięła odcinek AQ w punkcie C (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $|AQ| = 5 \cdot |BP|$ oraz $|CD| = 2 \cdot |BD|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

Zadanie 9. (0–4)

Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$2x - \frac{6x}{x-1} + \frac{18x}{(x-1)^2} - \frac{54x}{(x-1)^3} + \ \ldots$$

Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od 0 i od 1), dla których suma tego szeregu istnieje i jest równa $\frac{15}{2}$.

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

w zbiorze $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Zadanie 11. (0–4)

W pudełku umieszczono n kul ($n \geq 3$) wśród których dokładnie 2 kule są czarne, a pozostałe kule są białe. Z tego pudełka losujemy jedną kulę i odkładamy ją na bok. Jeżeli wylosowana kula jest biała, to do pudełka wrzucamy kulę czarną, a gdy wylosowana kula jest czarna, to do pudełka wrzucamy kulę białą. Po przeprowadzonej w ten sposób zmianie zawartości prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z tego pudełka jest równe $\frac{37}{50}$.

Oblicz n.

Zadanie 12. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

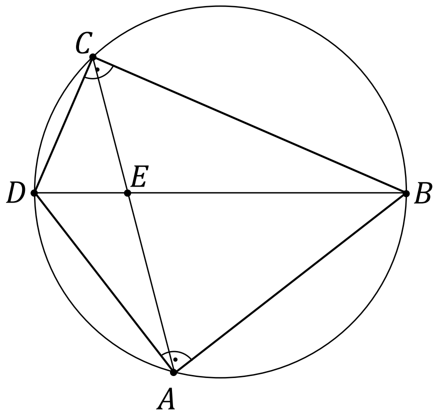
$$mx^2 - (m+1)x - 2m + 3 = 0$$

ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} < 1$$

Zadanie 13. (0–5)

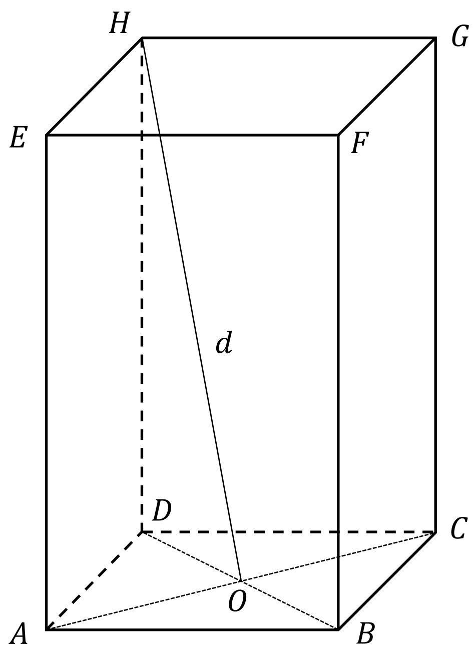
Czworokąt wypukły $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu 4. Kąty BAD i BCD są proste (zobacz rysunek). Przekątne AC i BD tego czworokąta przecinają się w punkcie E tak, że $|BE| = 3 \cdot |DE|$ oraz $|BD| = 2 \cdot |AE|$.



Oblicz długości boków czworokąta $ABCD$.

Zadanie 14. (0–6)

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe czworokątne $ABCDEFGH$, w których odcinek łączący punkt O przecięcia przekątnych AC i BD podstawy $ABCD$ z dowolnym wierzchołkiem podstawy $EFGH$ ma długość d (zobacz rysunek).



a) Wyznacz zależność objętości V graniastosłupa od jego wysokości h i podaj dziedzinę funkcji $V(h)$.

b) Wyznacz wysokość tego z rozważanych graniastosłupów, który ma największą objętość.

Zadanie 15. (0–7)

Okrąg o_1 o środku w punkcie S_1 jest określony równaniem $(x-6)^2+(y+1)^2=16$. Okrąg o_2 ma środek w punkcie S_2 takim, że $\overrightarrow{S_1S_2}=[-4,4]$. Promienie tych okręgów są sobie równe.

Figura F składa się z dwóch okręgów: o_1 oraz o_2. Punkty M i N są punktami przecięcia figury F z tą z jej osi symetrii, która jest prostą o dodatnim współczynniku kierunkowym.

Wyznacz punkt K, leżący na jednej z osi symetrii figury F, taki, że pole trójkąta MNK jest równe 40.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)