Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

POZIOM ROZSZERZONY

15 kwietnia 2023

Czas pracy: 180 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Ciąg (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ wzorem

$$a_n = \frac{(5p+3)n^3 + 7pn - 4}{(p-2)n^3 - n^2 + p},$$

gdzie p jest liczbą rzeczywistą. Oblicz wartość p, dla której granica ciągu (a_n) jest równa $\frac{3}{4}$.

Zadanie 2 (2 pkt)

W firmie zatrudniającej 390 pracowników sporządzono zestawienie wszystkich pracowników w wieku przedemerytalnym i okazało się, że wśród nich jest 96 mężczyzn i 45 kobiet. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany mężczyzna pracujący w tej firmie jest w wieku przedemerytalnym jest równe 0,4. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany pracownik tej firmy jest w wieku przedemerytalnym – pod warunkiem, że jest to kobieta.

ZADANIE 3 (3 PKT)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2}{x} - 3\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x > 0$. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $x_0 = 4$.

Zadanie 4 (3 pkt)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x oraz dla każdej liczby rzeczywistej y, spełniających warunek $x+y \geqslant -2$, prawdziwa jest nierówność

$$x^2(x+2)+y^2(y+2) \geqslant xy(x+y+4).$$

ZADANIE 5 (3 PKT)

Iloczyn wszystkich wyrazów ciągu danego wzorem

$$a_n = 3^{(\log_8 x)^n}, \quad \text{gdzie } n \geqslant 1,$$

jest równy $4^{\log_8 27}$. Oblicz x.

Zadanie 6 (4 pkt)

W trójkącie ABC na boku AB wybrano takie punkty A' i B', że

$$|AA'| = |BB'| < \frac{1}{2}|AB|.$$

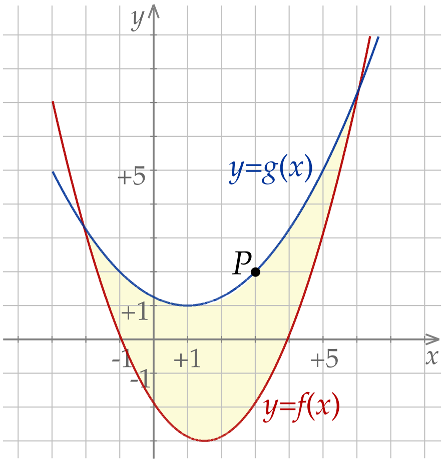
Przez punkty A' i B' poprowadzono proste równoległe do boków odpowiednio AC i BC. Proste te przecięły się w punkcie S. Wykaż, że odcinek CS jest zawarty w środkowej trójkąta ABC.

ZADANIE 7 (4 PKT)

Rozwiąż równanie $2\cos 2x + 7\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 2 + \sin^2 2x$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

Informacja do zadań 8.1 i 8.2

W parku krajobrazowym znajduje się zbiornik wodny, którego dwa brzegi postanowiono połączyć pomostem. Na podstawie dostępnych map wymodelowano w pewnej skali kształt linii brzegowej zbiornika w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) za pomocą fragmentów wykresów funkcji f oraz g, które odpowiadają przeciwległym brzegom zbiornika (zobacz rysunek).



Funkcje f oraz g są określone wzorami $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 3$ oraz $g(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1$. Jeden z końców pomostu postanowiono zlokalizować na brzegu opisanym funkcją g w punkcie o współrzędnych $P = (3, 2)$.

ZADANIE 8.1 (2 PKT)

Niech R będzie punktem leżącym na wykresie f. Wykaż, że odległość punktu R od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{45}{8}x + \frac{1537}{64}},$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R.

ZADANIE 8.2 (6 PKT)

Koniec pomostu należy umieścić na brzegu opisanym funkcją f. Oblicz współrzędne punktu K, w którym należy zlokalizować koniec pomostu, aby jego długość (tj. odległość końca K pomostu od początku P) była możliwie najmniejsza. Oblicz długość najkrótszego pomostu.

Przy rozwiązywaniu zadania możesz skorzystać z tego, że odległość dowolnego punktu R leżącego na wykresie funkcji f od punktu P wyraża się wzorem

$$|PR| = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{8}x^2 + \frac{45}{8}x + \frac{1537}{64}},$$

gdzie x jest pierwszą współrzędną punktu R.

Zadanie 9 (6 pkt)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCS$ o podstawie ABC i polu powierzchni bocznej równym P. Kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych poprowadzonych z wierzchołka S ma miarę 2α. Objętość tego ostrosłupa jest równa $\sqrt{k\cdot P^3\sin\alpha\left(3-4\sin^2\alpha\right)}$, gdzie k jest stałym współczynnikiem liczbowym. Oblicz współczynnik k.

Zadanie 10 (5 pkt)

Rozwiąż nierówność

$$\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{2-x} \geqslant \frac{2}{2+x} + 4x.$$

Zadanie 11 (5 pkt)

Dany jest równoległobok, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = -x + 3b$, $y = -x - 2b$, $y = b$, $y = 4$, gdzie liczba rzeczywista b spełnia warunki: $b \neq 4$ i $b \neq 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru b, dla których pole tego równoległoboku jest równe 20.

Zadanie 12 (5 pkt)

W okrąg o średnicy 16,25 wpisano trójkąt ostrokątny ABC, w którym $|BC| = 15$. Miary kątów BAC i ABC tego trójkąta spełniają warunek

$$\frac{\sin|\measuredangle BAC|}{\sin|\measuredangle ABC|} = \frac{15}{13}.$$

Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC.