Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

poziom rozszerzony

20 kwietnia 2024

Czas pracy: 180 minut

ZADANIE 1 (3 PKT)

Funkcja f o dziedzinie $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ jest określona jako nieskończona suma

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x} + \frac{8}{x^2} + \dots$$

Wykres funkcji $y = g(x)$ powstaje z wykresu funkcji $y = f(x)$ przez przesunięcie o wektor $[-2, -2]$. Rozwiąż nierówność $g(x) \leqslant 7$.

Zadanie 2 (3 pkt)

W skład pociągu osobowego wchodzi lokomotywa (która znajduje się na początku składu) i $n > 5$ wagonów osobowych, wśród których są dokładnie trzy wagony pierwszej klasy. Liczba takich ustawień kolejności wagonów, w których trzy wagony pierwszej klasy znajdują się bezpośrednio za sobą jest 12 razy mniejsza niż liczba ustawień wagonów, w których żaden z wagonów pierwszej klasy nie znajduje się ani na końcu pociągu ani bezpośrednio za lokomotywą. Oblicz n.

ZADANIE 3 (3 PKT)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{4x^2+3x}{x^2+2x+5}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Punkt $P = (x_0, 4)$ należy do wykresu funkcji f. Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.

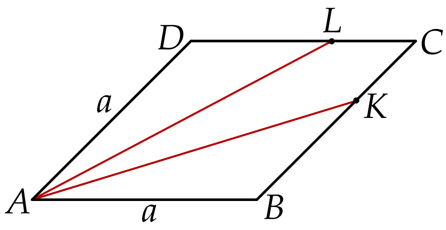
Zadanie 4 (3 pkt)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b prawdziwa jest nierówność

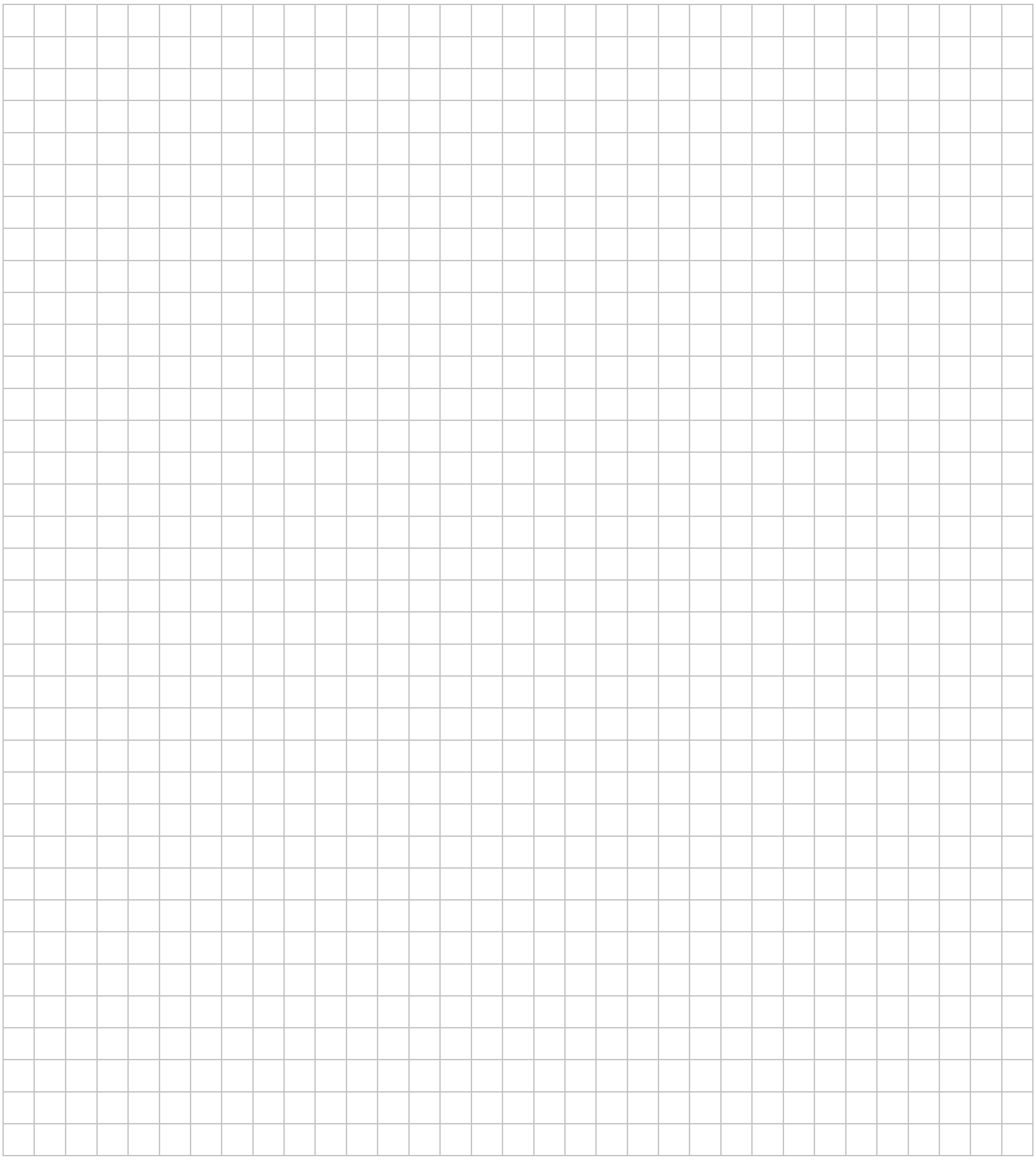
$$\frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{a}} \geqslant \frac{b+\sqrt{b}}{b+\sqrt{a}}.$$

Zadanie 5 (3 pkt)

Bok rombu $ABCD$ ma długość a, a sinus jego kąta ostrego DAB jest równy $\frac{\sqrt{15}}{4}$. Na bokach BC i CD wybrano punkty K i L odpowiednio tak, że odcinki AK i AL podzieliły pole rombu $ABCD$ na trzy równe części (zobacz rysunek).

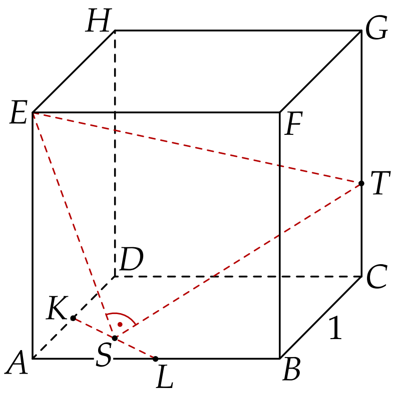


Oblicz długość odcinka AL.



ZADANIE 6 (4 PKT)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi długości 1. Punkty K i L są środkami odpowiednio krawędzi AD i AB, a punkt S jest środkiem odcinka KL. Punkt T jest takim punktem krawędzi CG, że $|\measuredangle EST| = 90^\circ$ (zobacz rysunek).



Oblicz odległość punktu S od środka odcinka ET.

ZADANIE 7 (4 PKT)

Rozwiąż równanie $2\cos x + 1 = 4\sin^2 x\cos x + 2\sin^2 x$, dla $x \in [0, 2\pi]$.

ZADANIE 8 (4 PKT)

Trapez równoramienny $ABCD$ nie jest równoległobokiem. Przekątna AC tego trapezu tworzy z podstawą AB kąt o mierze 60°. Wykaż, że trapez $ABCD$ nie może być opisany na okręgu.

Zadanie 9 (5 pkt)

Trzy liczby są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Ich suma wynosi 27. Jeśli największą z tych liczb zwiększymy o 12, a pozostałych nie zmienimy, to uzyskamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

Zadanie 10 (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m \neq 5$, dla których równanie

$$x^2 + 3x - \frac{m+4}{m-5} = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1^3 + x_2^3 > -54$.

Zadanie 11 (2 pkt)

Oblicz prawdopodobieństwo tego, że trzy losowo wybrane wierzchołki sześcianu są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

ZADANIE 12 (5 PKT)

Punkty $A = (20, 21)$ i $B = \left(-\frac{40}{3}, -4\right)$ są końcami przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego ABC. Punkt $S = (-5, -4)$ jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Oblicz pole trójkąta ABC.

ZADANIE 13 (6 PKT)

Rozważamy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 6.

a) Wyznacz zależność objętości V ostrosłupa od jego krawędzi podstawy a i podaj dziedzinę funkcji $V(a)$.

b) Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozważanych ostrosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tą największą objętość.