Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

poziom rozszerzony

26 marca 2022

Czas pracy: 180 minut

Zadania zamknięte

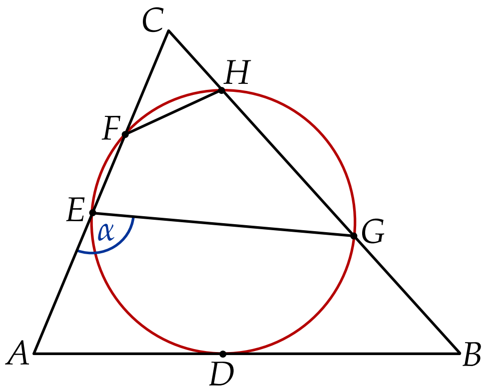
ZADANIE 1 (1 PKT)

W turnieju szachowym rozegrano 28 partii. Każdy zawodnik rozegrał z każdym dokładnie 1 mecz. Ilu zawodników brało udział w turnieju?

A) 10 B) 9 C) 8 D) 7

ZADANIE 2 (1 PKT)

Okrąg jest styczny do boku AB trójkąta ABC w punkcie D oraz przecina boki AC i BC tego trójkąta odpowiednio w punktach E, F i G, H (zobacz rysunek). Kat CHF ma miarę $72°$.

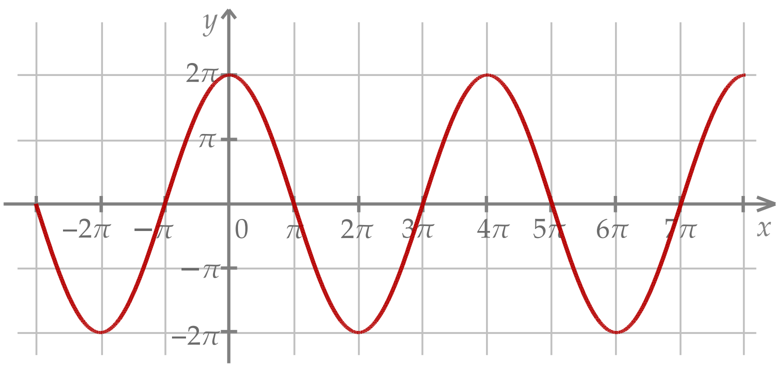


Zaznaczony na rysunku kąt α ma miarę

A) $126°$ B) $36°$ C) $108°$ D) $144°$

ZADANIE 3 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu pewnej funkcji f określonej dla każdej liczby rzeczywistej x. Jeden z podanych poniżej wzorów jest wzorem tej funkcji. Wskaż wzór funkcji f.



A) $f(x) = 2\cos(2x)$ B) $f(x) = 2\pi \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

C) $f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ D) $f(x) = 2\pi \cdot \cos(2x)$

ZADANIE 4 (1 PKT)

Wielomian $W(x) = x^4 + 16$ jest podzielny przez

A) $x - 2$ B) $x^2 + 4$ C) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 4$ D) $x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$

ZADANIE 5 (2 PKT)

Rozwiąż równanie $||1-x|-2|=3$.

ZADANIE 6 (3 PKT)

Oblicz granicę $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!-n!-(n-1)!}{(n+1)!+n!+(n-1)!}$.

ZADANIE 7 (3 PKT)

Udowodnij, że jeżeli $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$ i $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$, to $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$.

ZADANIE 8 (3 PKT)

Rzucono kostką do gry trzy razy. Za pierwszym razem nie wyrzucono 4 oczek. Oblicz prawdopodobieństwo, że suma oczek w trzech rzutach jest równa 15.

ZADANIE 9 (4 PKT)

Rozwiąż nierówność, której lewa strona jest sumą szeregu geometrycznego

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^4}+\cdots\leqslant\frac{4}{21}.$$

Zadanie 10 (4 pkt)

Długości wysokości trójkąta o bokach $39, 52, c$, gdzie $c > 52$ tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz promień okręgu wpisanego w ten trójkąt.

ZADANIE 11 (4 PKT)

Rozwiąż równanie $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi\rangle$.

ZADANIE 12 (5 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian kwadratowy

$$4x^2 - 2mx + m - 1$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 \leqslant \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}.$$

ZADANIE 13 (5 PKT)

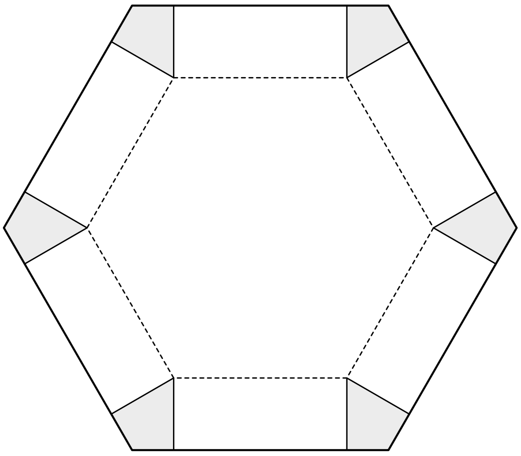
Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{2x^3+k}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Oblicz wartość k, dla której prosta o równaniu $y = -5x$ jest styczna do wykresu funkcji f.

Zadanie 14 (6 pkt)

W okrąg o środku $S=(2,3)$ wpisano trapez w taki sposób, że jedna podstawa jest średnicą okręgu, a druga jest zawarta w prostej o równaniu $2x+y+3=0$. Pole tego trapezu jest równe $10+10\sqrt{5}$. Oblicz współrzędne tych wierzchołków trapezu, które są końcami jego krótszej podstawy.

Zadanie 15 (7 pkt)

Z kawałka blachy w kształcie sześciokąta foremnego o boku długości 60 cm robimy pudełko o sześciokątnym dnie (otwarte od góry) w następujący sposób: przy każdym wierzchołku odcinamy taki sam deltoid, tnąc w tej samej odległości od wierzchołka raz prostopadle do jednego, a drugi raz do drugiego boku, następnie zaginamy blachę wzdłuż przerywanych linii i lutujemy krawędzie (zobacz rysunek).



Oblicz długość krawędzi podstawy tego pudełka, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.