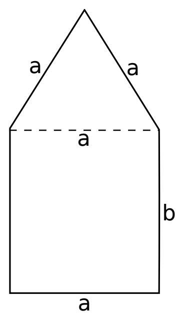
ZADANIA OPTYMALIZACYJNE 2

ZADANIE 1 (5 PKT)

Obwód okna przedstawionego na rysunku wynosi 7 m. W jakim stosunku powinny pozostawać odcinki a i b, aby przez okno wpadało jak najwięcej światła?



ZADANIE 2 (5 PKT)

Obwód trójkąta równobocznego ABC jest równy 12 cm. Punkty M, N i P należą odpowiednio do boków AB, BC, AC tego trójkąta przy czym $|AM| = |BN| = |CP| = x$. Zbadaj dla jakiej wartości x, pole trójkąta MNP będzie najmniejsze. Znajdź wartość tego pola.

ZADANIE 3 (5 PKT)

Dany jest zbiór wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 216. Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość tego z danych graniastosłupów, który ma największe pole powierzchni bocznej.

ZADANIE 4 (5 PKT)

Jaką największą objętość ma walec wpisany w kulę o średnicy długości 12 cm?

ZADANIE 5 (5 PKT)

W stożek, którego wysokość ma długość $H = 12$ dm, a promień jego podstawy ma długość $R = 4$ dm wpisano walec, o podstawach równoległych do podstawy stożka. Jakie powinny być wymiary walca, aby jego objętość była największa?

ZADANIE 6 (5 PKT)

Suma długości wysokości i długości jednej krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 2. Jaką najmniejszą długość może mieć przekątna takiego graniastosłupa.

ZADANIE 7 (5 PKT)

Spośród tych graniastosłupów prawidłowych trójkątnych, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 18, wybierz graniastosłup o największej objętości. Oblicz tę maksymalną objętość.

Zadanie 8 (5 pkt)
Puszka konserwy ma kształt walca. Jaką wysokość i jaki promień podstawy powinna mieć ta puszka, aby przy objętości puszki $250\pi cm^3$ zużyć jak najmniej materiału na jej wykonanie.

Zadanie 9 (5 pkt)
Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) dla $n \geqslant 1$, w którym $a_7 = 1,\ a_{11} = 9$.

a) Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r ciągu (a_n).

b) Sprawdź, czy ciąg (a_7, a_8, a_{11}) jest geometryczny.

c) Wyznacz takie n, aby suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) miała wartość najmniejszą.

Zadanie 10 (5 pkt)
Pierwszy, trzeci i jedenasty wyraz ciągu arytmetycznego o różnicy $r \neq 0$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego o ilorazie q. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = x^2 + mx + q$ osiąga minimum większe od -196?

Zadanie 11 (5 pkt)
Dziesiąty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest o 48 mniejszy od sumy jego pierwszych 7 wyrazów. Oblicz sumę pierwszych 33 wyrazów tego ciągu wiedząc, że iloczyn $a_{15}a_{19}$ ma najmniejszą możliwą wartość.

Zadanie 12 (5 pkt)
Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, w którym $a_{51} = 1$ oraz wyrażanie $a_{23}a_{37}$ ma najmniejszą możliwą wartość. Wyznacz a_1.

Zadanie 13 (5 pkt)
Wyznacz dziedzinę i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(8x - x^2)$.

Zadanie 14 (5 pkt)
Dana jest funkcja $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

a) Rozwiąż równanie $f(x) = 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

b) Wyznacz największą wartość funkcji f.

Zadanie 15 (5 pkt)
Dla każdej liczby rzeczywistej x obliczamy różnicę sześcianów liczb: o 1 mniejszej od x oraz o 2 większej od x. Zapisz wzór otrzymanej w ten sposób funkcji i wyznacz jej wartość największą.

Zadanie 16 (5 pkt)
Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+3}$.

ZADANIE 17 (5 PKT)

Wyznacz największą wartość funkcji $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2+4x+4}}$.

ZADANIE 18 (5 PKT)

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$ na przedziale $\langle -5, 10\rangle$.

ZADANIE 19 (5 PKT)

Wyznacz tę wartość parametru k, dla której suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + 2kx + 3k^2 - 6k - 2 = 0$ jest największa z możliwych.

ZADANIE 20 (5 PKT)

Funkcja kwadratowa postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, posiada miejsca zerowe równe -3 i 2, a jej współczynnik $a < 0$. Oblicz wartości współczynników a, b, c wiedząc, ze największa wartość funkcji wynosi $\frac{25}{16}$.