

## POWTÓRKA ROZSZERZENIE

ZADANIE 1 (4 PKT)

W trójkącie  $ABC$  dane są kąt  $|\angle ACB| = 120^\circ$ ,  $|AC| = 6$  i  $|BC| = 3$ . Dwusieczna kąta  $\angle ACB$  przecina bok  $AB$  w punkcie  $D$ .

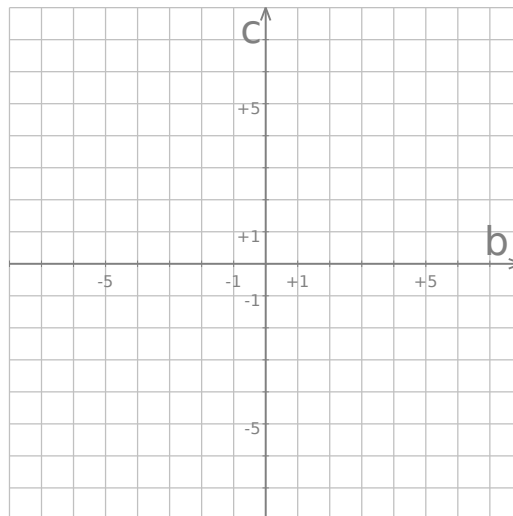
- Oblicz długość odcinka  $CD$ .
- Jaki jest związek między długościami promieni: okręgu opisanego na trójkącie  $ADC$  i okręgu opisanego na trójkącie  $DBC$ ? Odpowiedź uzasadnij.

ZADANIE 2 (4 PKT)

Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{\log_6^2 3 + \log_6 16}{\log_6 3 \cdot \log_6 48 + \log_6^2 4}$ .

ZADANIE 3 (4 PKT)

W prostokątnym układzie współrzędnych narysuj zbiór tych wszystkich punktów o współrzędnych  $(b, c)$ , dla których różne pierwiastki  $x_1$  i  $x_2$  równania  $x^2 - bx - 2c = 0$  spełniają warunek  $(x_1 + x_2)^3 < x_1^3 + x_2^3 - 6$ .



ZADANIE 4 (4 PKT)

Ciąg  $(a_n)$ , gdzie  $n \geq 1$  dany jest wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{6} \\ (\sqrt{2} + 1)a_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \end{cases}$$

- Oblicz sumę 21 początkowych wyrazów tego ciągu.
- Wyznacz wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których spełniona jest nierówność

$$7a_n \leq 3 - (n - 1)^2.$$

## ZADANIE 5 (5 PKT)

Uzasadnij, że funkcja  $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$  przyjmuje dla dodatnich argumentów wartości nie mniejsze niż 3.

## ZADANIE 6 (5 PKT)

Ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$ , losujemy jednocześnie trzy liczby. Ile mamy możliwości wylosowania takich trzech liczb, których suma jest nieparzysta?

## ZADANIE 7 (3 PKT)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  prawdziwa jest nierówność:

$$x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 > 0.$$

## ZADANIE 8 (3 PKT)

Właściciel kiosku notował liczbę biletów komunikacji miejskiej sprzedanych w kolejnych godzinach. Wyniki obserwacji zapisał w tabeli.

| Czas obserwacji | Liczba biletów |
|-----------------|----------------|
| 5:00–6:00       | 2              |
| 6:00–7:00       | 3              |
| 7:00–8:00       | 9              |
| 8:00–9:00       | 8              |
| 9:00–10:00      | 6              |
| 10:00–11:00     | 4              |
| 11:00–12:00     | 3              |
| 12:00–13:00     | 3              |
| 13:00–14:00     | 3              |
| 14:00–15:00     | 5              |
| 15:00–16:00     | 8              |
| 16:00–17:00     | 6              |

- Oblicz średnią liczbę biletów sprzedawanych w ciągu 1 godziny.
- Wynikiem „typowym” nazywamy wynik, który różni się od średniej o mniej niż jedno odchylenie standardowe. Podaj wszystkie godziny, w których liczba sprzedanych biletów nie była „typowa”.

## ZADANIE 9 (5 PKT)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym długość krawędzi podstawy jest równa  $a$ . Kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ma miarę  $45^\circ$ . Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej jej krawędzi bocznej. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz otrzymany przekrój. Oblicz pole tego przekroju.

## ZADANIE 10 (5 PKT)

W prostokącie  $ABCD$  dany jest wierzchołek  $C(3; 4)$  oraz  $\overrightarrow{AB} = [4; 3]$ . Znajdź równania przekątnych wiedząc, że wierzchołek  $A$  należy do prostej  $x - y = 5$ .

## ZADANIE 11 (4 PKT)

Suma długości dwóch boków trójkąta jest równa 12cm, a kąt między tymi bokami ma miarę  $120^\circ$ . Oblicz jakie powinny być długości boków tego trójkąta aby jego pole było największe.

## ZADANIE 12 (4 PKT)

Dana jest funkcja  $f$  określona wzorem  $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$  dla  $x \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ .

- Naszkić wykres funkcji  $f$ .
- Wyznacz miejsca zerowe funkcji  $f$ .