ZADANIE 1 (5 PKT)
Prostokąt $ABCD$ obracając się wokół boku AB, zakreślił walec w_1. Ten sam prostokąt obracając się wokół boku AD, zakreślił walec w_2. Otrzymane walce mają równe pola powierzchni całkowitych. Wykaż, że prostokąt $ABCD$ jest kwadratem.

ZADANIE 2 (5 PKT)
Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$ o bokach długości $|AB| = 7$ i $|BC| = 14$. Krawędź CS jest prostopadła do podstawy. Najdłuższa krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 50°. Wykonaj rysunek pomocniczy tego ostrosłupa oraz oblicz jego objętość.

ZADANIE 3 (5 PKT)
W stożek o promieniu r i wysokości h wpisujemy graniastosłupy sześciokątne prawidłowe tak, że jedna podstawa jest zawarta w podstawie stożka, a pozostałe wierzchołki należą do powierzchni bocznej stożka. Podaj wymiary graniastosłupa o największym polu powierzchni bocznej.

ZADANIE 4 (5 PKT)
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę α, zaś odległość wierzchołka podstawy od krawędzi bocznej, do której nie należy, jest równa d. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

ZADANIE 5 (5 PKT)
Dany jest zbiór wszystkich graniastosłupów prawidłowych sześciokątnych, których suma długości wszystkich krawędzi jest równa 216. Oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość tego z danych graniastosłupów, który ma największe pole powierzchni bocznej.

ZADANIE 6 (5 PKT)
Trzy wychodzące z jednego wierzchołka krawędzie równoległościanu są równe a, b i c. Krawędzie a i b są prostopadłe, a krawędź c tworzy z każdą z nich kąt ostry α. Oblicz objętość równoległościanu.

ZADANIE 7 (5 PKT)
W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem prostokątnym, $|\measuredangle ACB| = 90^\circ$. Sinus jednego z kątów ostrych podstawy jest równy 0,6 . Promień okręgu opisanego na podstawie ma długość 10cm. Wysokość SC ostrosłupa ma długość 24cm. Oblicz:

a) objętość ostrosłupa;

b) tangens kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa, zawierającej przeciwprostokątną podstawy, do płaszczyzny podstawy.

ZADANIE 8 (5 PKT)
Danych jest osiem kul z numerami od 1 do 8, oraz dziesięć szuflad z numerami od 1 do 10. Rozmieszczamy w dowolny sposób kule w szufladach. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

a) A – wszystkie kule znajdą się w szufladach z numerami parzystymi.

b) B – dokładnie dwie szuflady pozostaną puste.

ZADANIE 9 (5 PKT)
Dany jest wielomian $W(x) = 8x^3 - 6x^2 + ax + b$. Jednym pierwiastkiem wielomianu jest prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej 2 razy orła w trzykrotnym rzucie monetą. Drugi pierwiastek jest równy prawdopodobieństwu wypadnięcia parzystej liczby oczek na każdej kostce w rzucie dwiema kostkami. Wyznacz trzeci pierwiastek wielomianu.

ZADANIE 10 (5 PKT)
Niech n będzie liczbą naturalną. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 2n + 1\}$ losujemy dwie liczby (mogą być równe). Oblicz prawdopodobieństwo, że suma wylosowanych liczb będzie większa od $2n + 1$.

ZADANIE 11 (5 PKT)
W zbiorze $Z = \{-2n + 1, -2n + 3, \ldots, -3, -1, 0, 1, 3, \ldots, 2n - 3, 2n - 1\}$, gdzie $n > 4$ jest liczbą naturalną, zmieniono znaki na przeciwne trzem losowo wybranym liczbom. Wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że suma wszystkich liczb w zbiorze nie uległa zmianie wynosi $\frac{1}{161}$. Wyznacz n.

ZADANIE 12 (5 PKT)
Ze zbioru $Z = \{1, 2, 3, \ldots, 2n + 1\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ wylosowano równocześnie dwie liczby. Wyznacz n, tak aby prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest liczbą nieparzystą było większe od $\frac{7}{13}$.

ZADANIE 13 (5 PKT)

Uzasadnij, że

$$P((A' \cup B) \cap A) \geqslant \frac{1}{6},$$

jeżeli $P(A') = \frac{1}{3}$ i $P(B') = \frac{1}{2}$.

ZADANIE 14 (5 PKT)

Ze zbioru $\{-2n, -(2n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 2n-1, 2n\}$ losujemy ze zwracaniem dwie liczby: a i b. Rozważmy zdarzenia

A: $a+b$ jest liczbą parzystą;

B: $|a| + |b| \leqslant 2n$.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $P(A \cap B)$.

ZADANIE 15 (5 PKT)

Ze zbioru $X = \{x \in \mathbf{C} : |x+4| \leqslant 2\}$ losujemy dwa razy (bez zwracania) po jednej liczbie. Oznaczamy te liczby w kolejności losowania przez a oraz b. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wylosowana para liczb (a, b) jest rozwiązaniem nierówności $x - y - 2 < 0$.