

XII POLYGON MATEMATYCZNY

OPTIMALIZACJA - GEOMETRIA ANALITYCZNA

STYCZEŃ 2020

ZADANIE 1

Dana jest parabola opisana równaniem $y = (x - 3)^2 + 1$. Tworzymy trójkąty ABC takie, że punkt A leży w początku układu współrzędnych, punkt B o współrzędnych (x_b, y_b) leży na paraboli, punkt C ma współrzędne $(x_b, 0)$.

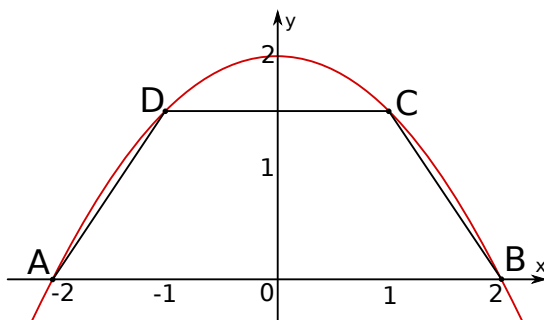
- Napisz wzór funkcji P , określającej pole trójkąta ABC w zależności od x_b dla $x_b > 0$.
- Znajdź trójkąt o największym polu dla $x_b \in [0; 2]$; w odpowiedzi podaj współrzędne punktu C .

ZADANIE 2

Który z odcinków łączących dowolny punkt paraboli o równaniu $y = x^2$ z punktem $A = (10; 2)$ ma najmniejszy kwadrat długości?

ZADANIE 3

Parabola o równaniu $y = 2 - \frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A = (-2, 0)$ i $B = (2, 0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne $ABCD$, których dłuższą podstawą jest odcinek AB , a końce C i D krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).



Wyznacz pole trapezu $ABCD$ w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka C . Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

ZADANIE 4

Dwa wierzchołki prostokąta leżą na osi x , a pozostałe dwa należą do paraboli o równaniu $f(x) = 4 - x^2$ i znajdują się powyżej osi x .

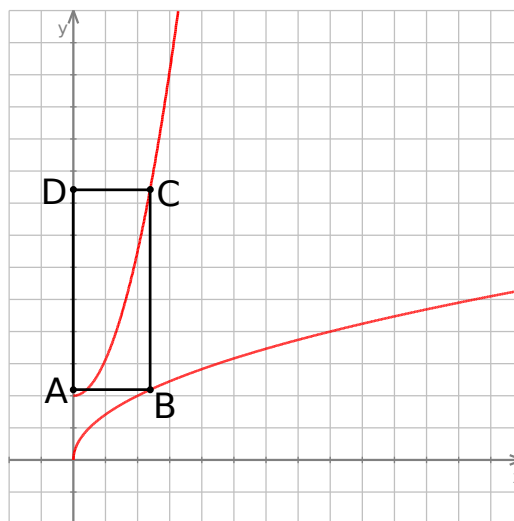
- Podaj wzór funkcji opisującej pole tego prostokąta w zależności od jego podstawy.
- Dla jakiej długości podstawy pole tego prostokąta jest równe 6.
- Dla jakiej długości podstawy pole tego prostokąta jest największe?

ZADANIE 5

Wyznacz wartość parametru m , dla której pole koła stycznego do prostych zawierających boki AB i CD równoległoboku $ABCD$ o wierzchołkach $A = (5, -4)$, $B = (2, -8)$, $C = (m^3 + 15m, m^4 + 10m^2)$ jest najmniejsze możliwe. Oblicz to pole.

ZADANIE 6

Rozpatrujemy prostokąty $ABCD$, których dwa wierzchołki leżą na osi Oy , jeden wierzchołek leży na paraboli określonej równaniem $y = \frac{9}{4}x^2 + 1$, jeden wierzchołek leży na wykresie funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ określonej dla $x \geq 0$. Oblicz pole tego z tych prostokątów, który ma najmniejszy możliwy obwód.



ZADANIE 7

Na wykresie funkcji $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2 + 22x + 50$ znajdź współrzędne punktu A , którego odległość od prostej o równaniu $y = -2x - 22$ jest najmniejsza.