

SPRAWDZIAN Maturalny 1. SEMESTR

ZADANIE 1 (5 PKT)

Wykaż, że jeżeli $a > 0$ i $b > 0$ oraz $\sqrt{a} + b = \sqrt{b} + a$ to $a = b$ lub $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$.

ZADANIE 2 (5 PKT)

Uzasadnij, że jeśli $ac + bd = bc + ad$ to $a = b$ lub $c = d$.

ZADANIE 3 (5 PKT)

Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\log_6^2 3 + \log_6 16}{\log_6 3 \cdot \log_6 48 + \log_6^2 4}$.

ZADANIE 4 (5 PKT)

Funkcja f dana jest wzorem

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2-x}.$$

Określ dziedzinę funkcji f i naszkicuj jej wykres w przedziale $\langle -6, 0 \rangle$.

ZADANIE 5 (5 PKT)

Wykaż, że wyrażenie $\frac{-\cos 2x}{\sin x \cos x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ nie jest tożsamością.

ZADANIE 6 (5 PKT)

Wykaż, że nie istnieje kąt α , dla którego spełniona jest równość $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{4}{5}$.

ZADANIE 7 (5 PKT)

Sinus pewnego kąta ostrego α , liczba $\frac{2}{3}$ oraz cosinus tego samego kąta α tworzą w podanej kolejności ciąg geometryczny. Oblicz sumę $\sin \alpha + \cos \alpha$.

ZADANIE 8 (5 PKT)

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1}$.

- Oblicz pierwszy i trzeci wyraz tego ciągu.
- Uzasadnij, korzystając z definicji ciągu geometrycznego, że ciąg (a_n) jest geometryczny.

ZADANIE 9 (5 PKT)

Dla jakich wartości parametru a równanie $|x - 2| = a^2 - 3a - 2$ ma dwa pierwiastki różnych znaków?

ZADANIE 10 (5 PKT)

Różnymi pierwiastkami równania kwadratowego $(m - 2)x^2 - 2x + 1 = 0$ są liczby x_1 oraz x_2 . Narysuj wykres funkcji $f(m) = |x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2|$.

ZADANIE 11 (5 PKT)

Zbadaj dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia się prostych $mx + (2m - 1)y - 3m = 0$ i $x + my - m = 0$ należy do prostokąta o wierzchołkach $A = (-1, -2)$, $B = (1, -2)$, $C = (1, 2)$, $D = (-1, 2)$?

ZADANIE 12 (5 PKT)

Za pomocą rachunku wektorowego pokazać, że środki boków dowolnego czworokąta tworzą wierzchołki równoległoboku.

ZADANIE 13 (5 PKT)

Na płaszczyźnie dane są punkty $A = (3, -2)$, $B = (11, 4)$. Na prostej o równaniu $y = 8x + 10$ znajdź punkt P , dla którego suma $|AP|^2 + |BP|^2$ jest najmniejsza.

ZADANIE 14 (5 PKT)

Dany jest czworokąt o kolejnych bokach długości 3, 4, 5 oraz kącie α między bokami długości 3 i 4 takim, że $\cos \alpha = -\frac{1}{11}$. Wyznacz długość czwartego boku, jeśli wiadomo, że na czworokącie można opisać okrąg.

ZADANIE 15 (5 PKT)

Wyznacz liczbę n , wiedząc że $\binom{n}{3} - \binom{n}{2} = 14$.

ZADANIE 16 (5 PKT)

Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0 < a < b < c$, to

$$\frac{a + b + c}{3} > \frac{a + b}{2}.$$

