SPRAWDZIAN Z 1. SEMESTRU

ZADANIE 1 (5 PKT)

Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + 3x - \frac{m-2}{m-3} = 0$ ma dwa pierwiastki rzeczywiste? Wyznacz te wartości parametru m, dla których suma sześcianów pierwiastków tego równania jest równa -9.

ZADANIE 2 (5 PKT)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |x^2 - 4|$, a następnie określ liczbę rozwiązań równania $|x^2 - 4| = m$ w zależności od wartości parametru m.

ZADANIE 3 (5 PKT)

Wyznacz wymiary prostokąta o obwodzie 36 cm, którego pole jest największe.

ZADANIE 4 (5 PKT)

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β są takie, że $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$.

ZADANIE 5 (5 PKT)

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC ma długość 8 oraz $|\measuredangle BAC| = 30^\circ$. Oblicz długość środkowej AD tego trójkąta.

ZADANIE 6 (5 PKT)

W jednokładności o środku S i skali k obrazem okręgu o równaniu $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 1$ jest okrąg o równaniu $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$. Oblicz współrzędne środka S jednokładności.

ZADANIE 7 (5 PKT)

Wyznacz miarę kąta ostrego α, dla którego wyrażenie $\frac{\sin^3\alpha + \cos^2\alpha \sin\alpha}{\cos\alpha}$ przyjmuje wartość $\sqrt{3}$.

ZADANIE 8 (5 PKT)

Dane jest równanie $\sin x = a^2 + 1$, z niewiadomą x . Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których dane równanie nie ma rozwiązań.

ZADANIE 9 (5 PKT)

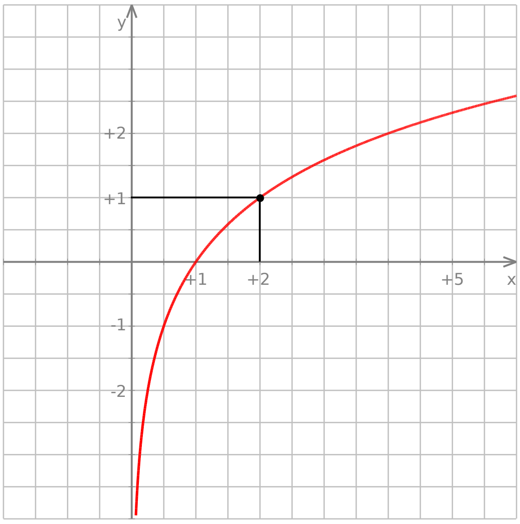
Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$ dla $x \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f.

b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji f.

ZADANIE 10 (5 PKT)

Dany jest wykres funkcji logarytmicznej f.



a) Wyznacz wzór funkcji f.

b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$.

c) Odczytaj z rysunku zbiór argumentów, dla których wartości funkcji g są nie mniejsze od wartości funkcji f.

ZADANIE 11 (5 PKT)

Wiedząc, że $\log_2 6 = a$, wyznacz $\log_{36} 24$.

ZADANIE 12 (5 PKT)

Wykaż, że jeżeli $a^2 + b^2 + 2 = 2a + 2b$, to $a = b = 1$.

ZADANIE 13 (5 PKT)

Uzasadnij, że jeżeli $a - b = 5$ i $a^2 + b^2 = 11$, to $a^4 + b^4 = 23$.

ZADANIE 14 (5 PKT)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d prawdziwa jest nierówność

$$ac + bd \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2}.$$

ZADANIE 15 (5 PKT)

Liczby a, b, c są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, a liczby $a + 1, b + 2, c + 6$ – trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego. Znajdź liczby a, b, c wiedząc, że ich suma jest równa 12.