

#### ZADANIE 1

Pierwszy wyraz malejącego ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  jest równy 3, a iloczyn wyrazów czwartego i piątego równy jest 15. Oblicz różnicę ciągu  $(a_n)$  oraz sumę 14 jego początkowych wyrazów.

#### ZADANIE 2

Podstawy czterech logarytmów liczby  $x$  tworzą ciąg geometryczny o ilorazie  $x$ . Wyznacz pierwszy z tych logarytmów jeśli jest on mniejszy od -1 oraz suma dwóch pierwszych logarytmów jest równa sumie dwóch pozostałych

#### ZADANIE 3

Trzy początkowe wyrazy malejącego ciągu arytmetycznego są pierwiastkami wielomianu  $W(x) = x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$ , a jednym z nich jest  $\sqrt{2}$ .

- Znajdź pierwszy wyraz tego ciągu.
- Oblicz sumę  $a_{50} + a_{51} + a_{52} + \dots + a_{100}$ .

#### ZADANIE 4

Podaj wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu  $(a_n)$ , jeżeli  $a_1 = 5$  i  $a_{n+1} = 2a_n$  dla  $n \geq 1$ .

#### ZADANIE 5

Iloczyn dziewięciu kolejnych początkowych wyrazów pewnego ciągu geometrycznego wynosi 512. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

#### ZADANIE 6

Trzynasty wyraz ciągu geometrycznego jest równy 10. Oblicz wartość iloczynu dwudziestu pięciu początkowych wyrazów tego ciągu.

#### ZADANIE 7

Udowodnij, że w ciągu geometrycznym  $(a_n)$  o wyrazach dodatnich iloczyn  $k > 1$  początkowych wyrazów ciągu jest równy  $\sqrt{(a_1 \cdot a_k)^k}$ .

#### ZADANIE 8

Wykaż, że jeżeli  $(a_n)$  jest ciągiem geometrycznym, to ciąg  $(b_n)$  o wyrazie ogólnym określonym wzorem  $b_n = 5a_n^2$  też jest ciągiem geometrycznym.

#### ZADANIE 9

Oblicz sumę nieskończonego ciągu geometrycznego 1, 0,5, 0,25, 0,125, ...

#### ZADANIE 10

Wykaż, że suma szeregu geometrycznego zbieżnego jest ujemna wtedy i tylko wtedy, gdy jego pierwszy wyraz jest ujemny.

## ZADANIE 11

Wykaż, że jeżeli liczby  $b$ ,  $c$ ,  $2b - a$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego to liczby  $ab$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

## ZADANIE 12

Dana jest funkcja określona wzorem  $f(x) = 3x - 5$ .

- a) Wyznacz ogólny wyraz ciągu  $a_n$  wiedząc, że:

$$a_1 = f(2), a_2 = f(4), a_3 = f(6), \dots, a_n = f(2n), \dots$$

- b) Uzasadnij, że ciąg  $(a_n)$  jest ciągiem arytmetycznym.  
c) Oblicz sumę  $a_{50} + a_{51} + \dots + a_{60}$ .

## ZADANIE 13

Ciąg  $(a_n)$ , gdzie  $n \geq 1$  dany jest wzorem rekurencyjnym

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{6} \\ (\sqrt{2} + 1)a_{n+1} = \frac{a_n - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \end{cases}$$

- a) Oblicz sumę 21 początkowych wyrazów tego ciągu.  
b) Wyznacz wszystkie liczby naturalne  $n$ , dla których spełniona jest nierówność

$$7a_n \leq 3 - (n - 1)^2.$$

## ZADANIE 14

Wyznacz te wartości  $x$ , dla których istnieje suma nieskończonego ciągu geometrycznego

- a)  $8, 4x, 2x^2, \dots$ ,  
b)  $1, 2 \cos x, 4 \cos^2 x, \dots$

Rozwiązania zadań znajdziesz na stronie  
[HTTP://WWW.ZADANIA.INFO/3850\\_8029R](http://www.zadania.info/3850_8029R)