Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

POZIOM ROZSZERZONY

27 marca 2021

Czas pracy: 180 minut

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Liczba $\sin^2(75^\circ)$ jest równa

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

ZADANIE 2 (1 PKT)

Prosta o równaniu $25y + 16x - 15 = 0$ jest prostopadła do stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3-2x+2x^3}{1-3x}$ w punkcie

A) $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$ B) $\left(1, -\frac{9}{2}\right)$ C) $\left(-1, \frac{3}{4}\right)$ D) $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

ZADANIE 3 (1 PKT)

Dane są dwie urny z kulami. W pierwszej urnie jest 10 kul: 8 białych i 2 czarne, w drugiej jest 8 kul: 5 białych i 3 czarne. Wylosowanie każdej z urn jest jednakowo prawdopodobne. Wylosowano jedną z tych urn i wyciągnięto z niej losowo jedną kulę. Wyciągnięta kula była biała. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana kula pochodziła z drugiej z tych urn, jest równe

A) $\frac{13}{18}$ B) $\frac{25}{57}$ C) $\frac{50}{57}$ D) $\frac{5}{18}$

ZADANIE 4 (1 PKT)

Po przekształceniu wyrażenia algebraicznego $\left(x\sqrt{3} - y\sqrt{2}\right)^4$ do postaci $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$ współczynnik c jest równy

A) -6 B) $8\sqrt{6}$ C) 36 D) $-12\sqrt{6}$

Zadanie 5 (2 pkt)

Dane są takie liczby dodatnie a i b, że ciąg $\left(\log a, \log \frac{a+b}{3}, \log b\right)$ jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Zadanie 6 (3 pkt)

Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ dzielą go na cztery trójkąty. Wykaż, że jeżeli promienie okręgów opisanych na tych czterech trójkątach są równe, to w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

ZADANIE 7 (3 PKT)

Liczby rzeczywiste a i b spełniają równość $a^3 + 3a^2 + 3a = 8b^3 + 12b^2 + 6b$. Wykaż, że $a = 2b$.

ZADANIE 8 (4 PKT)

Wyznacz zbiór wartości funkcji

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} + \cdots$$

określonej dla wszystkich wartości x, dla których prawa strona powyższego wzoru jest sumą wyrazów zbieżnego szeregu geometrycznego.

ZADANIE 9 (3 PKT)

Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $|BC| = 5\sqrt{2}$. Okrąg opisany na trójkącie ABD przecina prostą CD w takim punkcie E, że $|AE| = 10$ i $|\measuredangle AED| = 45^\circ$. Oblicz długość podstawy CD trapezu $ABCD$.

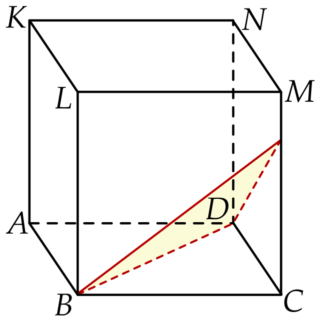
ZADANIE 10 (4 PKT)

Rozwiąż równanie

$$\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{5}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\frac{3}{4}.$$

ZADANIE 11 (4 PKT)

Sześcian $ABCDKLMN$ przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną BD podstawy, która jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ (zobacz rysunek).



Odległość wierzchołka C od płaszczyzny tego przekroju jest równa 6. Oblicz objętość sześcianu $ABCDKLMN$.

ZADANIE 12 (5 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których oba pierwiastki równania

$$(3m+1)x^2-(4m+1)x+12m=0$$

są większe od 2.

Zadanie 13 (5 pkt)

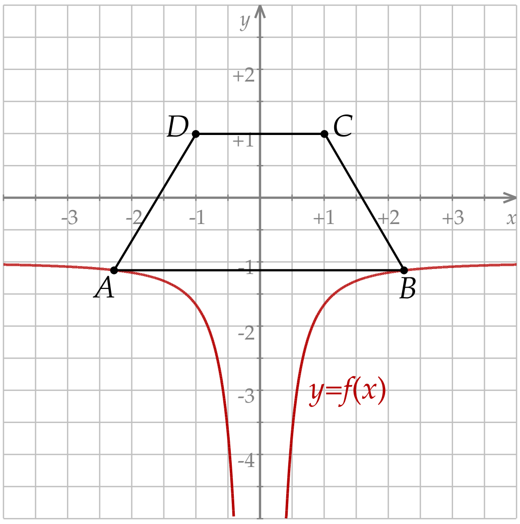
Punkt S jest punktem przecięcia się środkowych trójkąta równoramiennego ABC o podstawie AB. Okrąg o średnicy AB ma równanie $x^2 + y^2 + 12x - 10y + 44 = 0$, a cięciwa tego okręgu równoległa do prostej AB i przechodząca przez punkt S zawiera się w prostej o równaniu $x - y + 14 = 0$. Wyznacz równanie okręgu o środku C, który przechodzi przez punkty A i B.

ZADANIE 14 (6 PKT)

Ze zbioru liczb $\{1, 2 \ldots, 6n+1\}$, $n \geqslant 1$ losujemy kolejno trzy razy po jednej liczbie bez zwracania. Niech A_n oznacza zdarzenie polegające na tym, że iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6. Oblicz granicę $\lim_{n\to+\infty} P(A_n)$.

Zadanie 15 (7 pkt)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$, których wierzchołki A i B leżą na wykresie funkcji $f(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^2} - 1$ określonej dla $x \neq 0$. Punkt C ma współrzędne $(1,1)$, a oś Oy jest osią symetrii tego trapezu (zobacz rysunek).



Oblicz obwód tego trapezu $ABCD$, którego pole jest najmniejsze możliwe.