Treści nauczania – wymagania szczegółowe

I. Liczby rzeczywiste.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych;
2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia nie trudniejsze niż:
   a) dowód podzielności przez 24 iloczynu czterech kolejnych liczb naturalnych,
   b) dowód własności: jeśli liczba przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, to jej trzecia potęga przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2;
3) stosuje własności pierwiastków dowolnego stopnia, w tym pierwiastków stopnia nieparzystego z liczb ujemnych;
4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach;
5) stosuje własności monotoniczności potęgowania, w szczególności własności: jeśli $x < y$ oraz $a > 1$, to $a^x < a^y$, zaś gdy $x < y$ i $0 < a < 1$, to $a^x > a^y$;
6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego, zaznacza przedziały na osi liczbowej;
7) stosuje interpretację geometryczną i algebraiczną wartości bezwzględnej, rozwiązuje równania i nierówności typu: $|x+4| = 5$, $|x-2| < 3$, $|x+3| \geq 4$;
8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów;
9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje wzór na zamianę podstawy logarytmu.

II. Wyrażenia algebraiczne.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3-b^3, a^n-b^n;
2) dodaje, odejmuje i mnoży wielomiany jednej i wielu zmiennych;
3) wyłącza poza nawias jednomian z sumy algebraicznej;
4) rozkłada wielomiany na czynniki metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias oraz metodą grupowania wyrazów, w przypadkach nie trudniejszych niż rozkład wielomianu $W(x) = 2x^3 - \sqrt{3}x^2 + 4x - 2\sqrt{3}$;
5) znajduje pierwiastki całkowite wielomianu o współczynnikach całkowitych;
6) dzieli wielomian jednej zmiennej $W(x)$ przez dwumian postaci $x-a$;
7) mnoży i dzieli wyrażenia wymierne;

8) dodaje i odejmuje wyrażenia wymierne, w przypadkach nie trudniejszych niż: $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$, $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x-1}{x+1}$.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) znajduje pierwiastki całkowite i wymierne wielomianu o współczynnikach całkowitych;
2) stosuje podstawowe własności trójkąta Pascala oraz następujące własności współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona): $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{n-1}=n$, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$;
3) korzysta ze wzorów na: a^3+b^3, $(a+b)^n$ i $(a-b)^n$.

III. Równania i nierówności.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny;
2) interpretuje równania i nierówności sprzeczne oraz tożsamościowe;
3) rozwiązuje nierówności liniowe z jedną niewiadomą;
4) rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe;
5) rozwiązuje równania wielomianowe, które dają się doprowadzić do równania kwadratowego, w szczególności równania dwukwadratowe;
6) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x)=0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
7) rozwiązuje równania wymierne postaci $\frac{V(x)}{W(x)}=0$, gdzie wielomiany $V(x)$ i $W(x)$ są zapisane w postaci iloczynowej.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) rozwiązuje nierówności wielomianowe typu: $W(x)>0$, $W(x)\geq 0$, $W(x)<0$, $W(x)\leq 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej lub takich, które dają się doprowadzić do postaci iloczynowej metodą wyłączania wspólnego czynnika przed nawias lub metodą grupowania;
2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne nie trudniejsze niż $\frac{x+1}{x(x-1)}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{2x}{(x-1)(x+1)}$;
3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych;

4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną, o stopniu trudności nie większym niż: $2|x+3|+3|x-1|=13$, $|x+2|+2|x-3|<11$;
5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

IV. Układy równań.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozwiązuje układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, podaje interpretację geometryczną układów oznaczonych, nieoznaczonych i sprzecznych;
2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych;
3) rozwiązuje metodą podstawiania układy równań, z których jedno jest liniowe, a drugie kwadratowe, postaci $\begin{cases} ax+by=e \\ x^2+y^2+cx+dy=f \end{cases}$ lub $\begin{cases} ax+by=e \\ y=cx^2+dx+f. \end{cases}$

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto rozwiązuje układy równań kwadratowych postaci $\begin{cases} x^2+y^2+ax+by=c \\ x^2+y^2+dx+ey=f. \end{cases}$

V. Funkcje.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) określa funkcje jako jednoznaczne przyporządkowanie za pomocą opisu słownego, tabeli, wykresu, wzoru (także różnymi wzorami na różnych przedziałach);
2) oblicza wartość funkcji zadanej wzorem algebraicznym;
3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą tabel, wykresów, wzorów itp., również w sytuacjach wielokrotnego użycia tego samego źródła informacji lub kilku źródeł jednocześnie;
4) odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, przedziały monotoniczności, przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe (nie mniejsze) lub mniejsze (nie większe) od danej liczby, największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym oraz argumenty, dla których wartości największe i najmniejsze są przez funkcję przyjmowane;
5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej;
6) wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o jej wykresie lub o jej własnościach;
7) szkicuje wykres funkcji kwadratowej zadanej wzorem;
8) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej (jeśli istnieje);
9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie;

10) wyznacza największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
11) wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym;
12) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ szkicuje wykresy funkcji $y=f(x-a)$, $y=f(x)+b$, $y=-f(x)$, $y=f(-x)$;
13) posługuje się funkcją $f(x)=\frac{a}{x}$, w tym jej wykresem, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, również w zastosowaniach praktycznych;
14) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) na podstawie wykresu funkcji $y=f(x)$ rysuje wykres funkcji $y=|f(x)|$;
2) posługuje się złożeniami funkcji;
3) dowodzi monotoniczności funkcji zadanej wzorem, jak w przykładzie: wykaż, że funkcja $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ jest monotoniczna w przedziale $(-\infty,-2)$.

VI. Ciągi.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
2) oblicza początkowe wyrazy ciągów określonych rekurencyjnie, jak w przykładach:

   a) $\begin{cases} a_1 = 0,001 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n(1-a_n), \end{cases}$

   b) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \end{cases}$

3) w prostych przypadkach bada, czy ciąg jest rosnący, czy malejący;
4) sprawdza, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny;
5) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
6) stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice ciągów, korzystając z granic ciągów typu $\frac{1}{n}$, $\sqrt[n]{a}$ oraz twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych, a także twierdzenia o trzech ciągach;
2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

VII. Trygonometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus, cosinus i tangens dla kątów od $0°$ do $180°$, w szczególności wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°;
2) znajduje przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych, korzystając z tablic lub kalkulatora;
3) znajduje za pomocą tablic lub kalkulatora przybliżoną wartość kąta, jeśli dana jest wartość funkcji trygonometrycznej;
4) korzysta z wzorów $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
5) stosuje twierdzenia sinusów i cosinusów oraz wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$
6) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (rozwiązuje trójkąty).

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje miarę łukową, zamienia miarę łukową kąta na stopniową i odwrotnie;
2) posługuje się wykresami funkcji trygonometrycznych: sinus, cosinus, tangens;
3) wykorzystuje okresowość funkcji trygonometrycznych;
4) stosuje wzory redukcyjne dla funkcji trygonometrycznych;
5) korzysta z wzorów na sinus, cosinus i tangens sumy i różnicy kątów, a także na funkcje trygonometryczne kątów podwojonych;
6) rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładach: $4\cos 2x \cos 5x = 2\cos 7x + 1$, $2\sin^2 x \leq 1$.

VIII. Planimetria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) wyznacza promienie i średnice okręgów, długości cięciw okręgów oraz odcinków stycznych, w tym z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa;
2) rozpoznaje trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne przy danych długościach boków (m.in. stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa

i twierdzenie cosinusów); stosuje twierdzenie: w trójkącie naprzeciw większego kąta wewnętrznego leży dłuższy bok;
3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności;
4) korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach;
5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych;
6) stosuje wzory na pole wycinka koła i długość łuku okręgu;
7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;
8) korzysta z cech podobieństwa trójkątów;
9) wykorzystuje zależności między obwodami oraz między polami figur podobnych;
10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: środek okręgu wpisanego w trójkąt, środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum, środek ciężkości oraz korzysta z ich własności;
11) stosuje funkcje trygonometryczne do wyznaczania długości odcinków w figurach płaskich oraz obliczania pól figur;
12) przeprowadza dowody geometryczne.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

IX. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie na podstawie ich równań, w tym znajduje wspólny punkt dwóch prostych, jeśli taki istnieje;
2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej i ogólnej, w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich jak na przykład przechodzenie przez dwa dane punkty, znany współczynnik kierunkowy, równoległość lub prostopadłość do innej prostej, styczność do okręgu);
3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
4) posługuje się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$;
5) oblicza odległość punktu od prostej;
6) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej;
7) wyznacza obrazy okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych, symetrii środkowej (o środku w początku układu współrzędnych).

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) stosuje równanie okręgu w postaci ogólnej;
2) znajduje punkty wspólne dwóch okręgów;

3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie.

X. Stereometria.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) rozpoznaje wzajemne położenie prostych w przestrzeni, w szczególności proste prostopadłe nieprzecinające się;
2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną oraz pojęciem kąta dwuściennego między półpłaszczyznami;
3) rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi) oraz kąty między ścianami, oblicza miary tych kątów;
4) rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą), oblicza miary tych kątów;
5) określa, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną;
6) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów, ostrosłupów, walca, stożka i kuli, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń;
7) wykorzystuje zależność między objętościami brył podobnych.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) zna i stosuje twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny i o trzech prostopadłych;
2) wyznacza przekroje sześcianu i ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.

XI. Kombinatoryka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych;
2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) dla dowolnej liczby czynności w sytuacjach nie trudniejszych niż:
   a) obliczenie, ile jest czterocyfrowych nieparzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 1 i dokładnie jedna cyfra 2,
   b) obliczenie, ile jest czterocyfrowych parzystych liczb całkowitych dodatnich takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje dokładnie jedna cyfra 0 i dokładnie jedna cyfra 1.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza liczbę możliwych sytuacji, spełniających określone kryteria, z wykorzystaniem reguły mnożenia i dodawania (także łącznie) oraz wzorów na

liczbę: permutacji, kombinacji i wariacji, również w przypadkach wymagających rozważenia złożonego modelu zliczania elementów;
2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności przy rozwiązywaniu problemów kombinatorycznych.

XII. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka.

Zakres podstawowy. Uczeń:

1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym;
2) stosuje skalę centylową;
3) oblicza średnią arytmetyczną i średnią ważoną, znajduje medianę i dominantę;
4) oblicza odchylenie standardowe zestawu danych (także w przypadku danych odpowiednio pogrupowanych), interpretuje ten parametr dla danych empirycznych;
5) oblicza wartość oczekiwaną, np. przy ustalaniu wysokości wygranej w prostych grach losowych i loteriach.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe i stosuje wzór Bayesa, stosuje twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym;
2) stosuje schemat Bernoulliego.

XIII. Optymalizacja i rachunek różniczkowy.

Zakres podstawowy. Uczeń rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.

Zakres rozszerzony. Uczeń spełnia wymagania określone dla zakresu podstawowego, a ponadto:

1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne);
2) stosuje własność Darboux do uzasadniania istnienia miejsca zerowego funkcji i znajdowania przybliżonej wartości miejsca zerowego;
3) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną i fizyczną pochodnej;
4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu i funkcji złożonej;
5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji;
6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Warunki i sposób realizacji

Korelacja. Ze względu na użyteczność matematyki i jej zastosowania w szkolnym nauczaniu fizyki, informatyki, geografii i chemii zaleca się zrealizować treści nauczania określone w działach: I pkt 9 (logarytmy) i w miarę możliwości V pkt 14, V pkt 1 (pojęcie funkcji) i V pkt 5 (funkcje liniowe) w pierwszym półroczu klasy pierwszej, zaś treści nauczania określone w działach: V pkt 11 (funkcje kwadratowe) i V pkt 13 (proporcjonalność odwrotna) nie później niż do końca klasy pierwszej. Treści nauczania określone w dziale VI pkt 2 (obliczanie początkowych wyrazów ciągów określonych rekurencyjnie) można realizować w korelacji z analogicznym zagadnieniem podstawy programowej z informatyki.

Oznaczenia. Uczniowie powinni używać powszechnie przyjętego oznaczenia zbiorów liczbowych, a w szczególności: dla liczb całkowitych symbolu Z, dla liczb wymiernych – Q, dla liczb rzeczywistych – R.

Przedziały. Uczeń powinien wykorzystywać przedziały do opisu zbioru rozwiązań nierówności. Najważniejsza w odpowiedzi jest jej poprawność. Na przykład rozwiązanie nierówności $x^2-9x+20>0$ może być zapisane na każdy z poniższych sposobów:
– rozwiązaniem nierówności może być każda liczba x, która jest mniejsza od 4 lub większa od 5;
– rozwiązaniami są wszystkie liczby x mniejsze od 4 i wszystkie liczby x większe od 5;
– $x<4$ lub $x>5$;
– $x\in(-\infty,4)$ lub $x\in(5,\infty)$;
– $x\in(-\infty,4)\cup(5,\infty)$.

Zastosowania logarytmów. Przy nauczaniu logarytmów warto podkreślić ich zastosowania w wyjaśnianiu zjawisk przyrodniczych, których przebieg opisuje funkcja logarytmiczna. Procesy takie zachodzą, gdy w przedziale czasowym pewna wielkość zawsze rośnie (lub maleje) ze stałą krotnością. Poniższe przykładowe zadania ilustrują zastosowania logarytmu.

Z1. Skala Richtera służy do określenia siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R=\log\frac{A}{A_0}$, gdzie *A* oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0=10^{-4}\,\mathrm{cm}$ jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 25 kwietnia 2015 r. w Nepalu miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 7,8 w skali Richtera. Oblicz amplitudę tego trzęsienia ziemi.

Z2. Chory przyjął dawkę 100 mg leku. Masę tego leku pozostałą w organizmie po czasie *t* określa zależność $M(t)=a\cdot b^t$. Po pięciu godzinach organizm usuwa 30% leku. Oblicz, ile leku pozostanie w organizmie chorego po upływie doby.

Postać kanoniczna. Przy omawianiu funkcji kwadratowej podkreślać należy znaczenie postaci kanonicznej i wynikających z tej postaci własności. Warto zwrócić uwagę, że wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego oraz na współrzędne wierzchołka paraboli są jedynie wnioskami z postaci kanonicznej. Wiele zagadnień związanych z funkcją kwadratową daje się rozwiązać bezpośrednio z tej postaci, bez mechanicznego stosowania wzorów. W szczególności postać kanoniczna pozwala znajdować najmniejszą lub największą wartość funkcji kwadratowej, a także oś symetrii jej wykresu.

Złożenia funkcji i funkcje odwrotne. Definicja funkcji złożonej pojawia się dopiero w zakresie rozszerzonym, ale już w zakresie podstawowym oczekuje się od ucznia umiejętności operowania równocześnie danymi zaczerpniętymi z kilku źródeł. Nie wymaga to jednak formalnego wprowadzenia operacji złożenia czy odwracania funkcji.

Przekształcenia równoważne. W trakcie rozwiązywania równań i nierówności należy zwracać uwagę, że obok metody przekształceń równoważnych można stosować metodę wnioskowania (metoda analizy starożytnych). Po wyznaczeniu potencjalnego zbioru rozwiązań następuje sprawdzenie, które z wyznaczonych wartości istotnie są rozwiązaniami. W wielu sytuacjach nie warto domagać się przekształceń równoważnych, gdy metoda wnioskowania prowadzi do szybkich rezultatów. Ponadto uczniowie powinni wiedzieć, że uprawnioną metodą dowodzenia jest równoważne przekształcanie tezy.

Zastosowania algebry. Warunkiem powodzenia procesu nauczania matematyki jest sprawne posługiwanie się wyrażeniami algebraicznymi. Metody algebraiczne często dają się stosować w sytuacjach geometrycznych i na odwrót – ilustracja geometryczna pozwala lepiej zrozumieć zagadnienia algebraiczne.

Ciągi. Zagadnienie to należy omawiać tak, by uczniowie zdali sobie sprawę, że poza ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi istnieją też inne. Podobnie należy podkreślić, że poza ciągami niemalejącymi, rosnącymi, nierosnącymi, malejącymi i stałymi istnieją też takie, które nie są monotoniczne. Warto zwrócić uwagę uczniów, że niektóre ciągi opisują dynamikę procesów występujących w przyrodzie bądź społeczeństwie. Przykładowo podany w dziale VI pkt 2 lit. a ciąg opisuje szybkość rozprzestrzeniania się plotki (liczba a_n podaje, ile osób o plotce słyszało). Podobny model może być użyty do opisu rozprzestrzeniania się epidemii.

Granica ciągu. Przed sformułowaniem definicji granicy ciągu warto zadawać uczniom pytania w rodzaju: czy istnieje taka liczba naturalna *k*, że dla każdej liczby naturalnej *n* większej od *k* zachodzi nierówność $\frac{1}{3} < \frac{n}{2n+1} < \frac{2}{3}$? Twierdzenie o trzech ciągach także wspiera budowanie intuicji granicy ciągu. Obliczanie granic ciągów warto poprzedzić wykorzystaniem programów komputerowych do rysowania wykresów ciągów. Dokładniejsze obliczenia ułatwią w odpowiednio dobranych przykładach formułowanie hipotez na temat istnienia wartości granicy ciągu.

Planimetria. Rozwiązywanie klasycznych problemów geometrycznych jest skutecznym sposobem kształtowania świadomości matematycznej. Uczniowie, którzy rozwiązują zadania konstrukcyjne, nabywają przez to wprawy w rozwiązywaniu zadań geometrycznych różnego typu, na przykład uczeń z łatwością przyswoi własności okręgów wpisanych w trójkąt czy czworokąt, jeśli potrafi skonstruować te figury. Nauczanie konstrukcji geometrycznych można przeprowadzać w sposób klasyczny, za pomocą linijki i cyrkla, można też używać specjalistycznych programów komputerowych, takich jak np. GeoGebra.

Dwumian Newtona. Ważne jest, żeby przy okazji nauczania wzoru na $(a+b)^n$ podkreślić znaczenie współczynnika dwumianowego (symbolu Newtona) $\binom{n}{k}$ w kombinatoryce. Warto go również zapisywać w postaci $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k}$, gdyż w tej formie jest bardziej widoczna jego interpretacja i łatwiej obliczyć jego wartość dla małych *k*.

Rachunek prawdopodobieństwa. Uczniowie w przyszłości będą mieli do czynienia z zagadnieniami powiązanymi z losowością, które występują w różnych dziedzinach życia i nauki, na przykład: przy analizie sondaży, zagadnień z zakresu ekonomii i badaniach rynków finansowych lub w naukach przyrodniczych i społecznych. Warto wspomnieć o paradoksach rachunku prawdopodobieństwa, które pokazują typowe błędy w rozumowaniu i omówić niektóre z nich. Warto też przeprowadzać z uczniami eksperymenty, np. eksperyment, w którym uczniowie zapisują długi ciąg orłów i reszek bez losowania, a następnie zapisują ciąg orłów i reszek powstały w wyniku losowych rzutów monetą. Błędne intuicje na temat losowości podpowiadają zwykle, że nie powinny pojawiać się długie sekwencje orłów (albo reszek), podczas kiedy w rzeczywistości takie długie sekwencje orłów (lub reszek) występują. Omawianie w zakresie podstawowym wartości oczekiwanej nie wymaga wprowadzania pojęcia zmiennej losowej. Wskazane jest raczej posługiwanie się intuicyjnym rozumieniem wartości oczekiwanej zysku czy ustalanie liczby obiektów spełniających określone własności. W ten sposób uczeń ma możliwość dostrzeżenia związków prawdopodobieństwa z życiem codziennym, ma także szanse kształtowania umiejętności unikania zachowań ryzykownych, np. przy decyzjach finansowych.

W zakresie rozszerzonym ważne jest uświadomienie uczniom, że rachunek prawdopodobieństwa nie ogranicza się jedynie do schematu klasycznego i używanej tam kombinatoryki. Dobrą ilustracją są przykłady zastosowania schematu Bernoulliego dla dużej liczby prób.

Pochodne. Posługiwanie się pojęciem granicy ilorazu różnicowego konieczne do zrozumienia pojęcia pochodnej wymaga dużych możliwości poznawczych. Dlatego też pochodne należy wprowadzać w pierwszej kolejności intuicyjnie, posługując się interpretacją fizyczną (prędkość chwilowa, natężenie prądu) oraz geometryczną (styczna, nachylenie wykresu). Podstawowym zastosowaniem definicji pochodnej może być wyprowadzenie wzoru na pochodną jednomianu i pochodną sumy, iloczynu i złożenia funkcji (gdy funkcja wewnętrzna jest różnowartościowa). Uczniowie powinni też poznać twierdzenie mówiące, że funkcja ciągła na przedziale i różniczkowalna wewnątrz tego przedziału jest niemalejąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej pochodna jest nieujemna.

Dowody. Samodzielne przeprowadzanie dowodów przez uczniów rozwija takie umiejętności, jak: logiczne myślenie, precyzyjne wyrażanie myśli i zdolność rozwiązywania złożonych problemów. Dowodzenie pozwala doskonalić umiejętność dobierania trafnych argumentów i konstruowania poprawnych rozumowań. Jedną z metod rozwijania umiejętności dowodzenia jest analizowanie dowodów poznawanych twierdzeń. Można uczyć w ten sposób, jak powinien wyglądać właściwie przeprowadzony dowód. Umiejętność formułowania poprawnych rozumowań i uzasadnień jest ważna również poza matematyką. Poniżej znajduje się lista twierdzeń, których dowody powinien uczeń poznać.

Twierdzenia, dowody – zakres podstawowy

1. Istnienie nieskończenie wielu liczb pierwszych.
2. Niewymierność liczb: $\sqrt{2}$, $\log_2 5$ itp.
3. Wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego.
4. Podstawowe własności potęg (o wykładnikach całkowitych i wymiernych) i logarytmów.
5. Twierdzenie o dzieleniu z resztą wielomianu przez dwumian postaci $x-a$ wraz ze wzorami rekurencyjnymi na współczynniki ilorazu i resztę (algorytm Hornera) – dowód można przeprowadzić w szczególnym przypadku, np. dla wielomianu czwartego stopnia.
6. Wzory na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego.
7. Twierdzenie o kątach w okręgu:
   1) kąt wpisany jest połową kąta środkowego opartego na tym samym łuku;
   2) jeżeli dwa kąty są wpisane w ten sam okrąg, to są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na równych łukach.
8. Twierdzenie o odcinkach w trójkącie prostokątnym. Jeśli odcinek *CD* jest wysokością trójkąta prostokątnego *ABC* o kącie prostym *ACB*, to $|AD|\cdot|BD|=|CD|^2$, $|AC|^2=|AB|\cdot|AD|$ oraz $|BC|^2=|AB|\cdot|BD|$.
9. Twierdzenie o dwusiecznej. Jeśli prosta *CD* jest dwusieczną kąta *ACB* w trójkącie *ABC* i punkt *D* leży na boku *AB*, to $\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|}{|BC|}$.
10. Wzór na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.
11. Twierdzenie sinusów.
12. Twierdzenie cosinusów i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

Twierdzenia, dowody – zakres rozszerzony

1. Dowód kombinatoryczny tożsamości: jeśli $0<k<n$, to $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$.
2. Wzór dwumianowy Newtona. Wzory skróconego mnożenia na $a^n \pm b^n$ (przy odpowiednich założeniach o *n*) oraz jako wniosek: dla liczb całkowitych *a* i *b*, $a-b \mid a^n-b^n$.
3. Wzory Viète’a.
4. Wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów.
5. Twierdzenia o istnieniu niektórych punktów szczególnych trójkąta:

a) symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie i (jako wniosek) proste zawierające wysokości trójkąta przecinają się w jednym punkcie,

b) środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

6. Twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg. Czworokąt wypukły *ABCD* można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $|\angle BAD| + |\angle BCD| = |\angle ABC| + |\angle ADC| = 180^\circ$.
7. Twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu. W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$.
8. Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny. Dane są proste *k*, *l* i *m* leżące na jednej płaszczyźnie. Jeśli proste *k* i *l* przecinają się i prosta *n* jest do nich prostopadła, to prosta
n jest także prostopadła do prostej *m*.
9. Twierdzenie o trzech prostopadłych. Prosta *k* przecina płaszczyznę *P* i nie jest do niej prostopadła. Prosta *l* jest rzutem prostokątnym prostej *k* na płaszczyznę *P*. Prosta *m* leży na płaszczyźnie *P*. Wówczas proste *k* i *m* są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy proste *l* i *m* są prostopadłe.