

## JĘZYK MATEMATYKI

## ZADANIE 1

Niech  $A = \langle -6, 4 \rangle$ ,  $B = (-3, +\infty)$ ,  $C = \langle -5, 1 \rangle$ . Wyznacz zbiór  $(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ .

## ZADANIE 2

Niech  $A$  będzie zbiorem rozwiązań równania  $|x - \sqrt{3}| = x - \sqrt{3}$ ,  $B = (-\infty, \sqrt{2})$  oraz  $C = \langle -1, 2 \rangle$ . Wyznacz zbiór  $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ .

## ZADANIE 3

Zaznacz na osi liczbowej przedziały  $A = (-\infty, 5)$  i  $B = \langle 2, 10 \rangle$ . Wyznacz  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  i  $B \setminus A$ .

## ZADANIE 4

Dane są zbiory:  $A = \langle -5; 2 \rangle$ ,  $B = (-\infty; 10)$ ,  $C = (0; 11)$ . Zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów zbiory:

a)  $B \setminus (C \cup A)$

b)  $(B \cap C) \setminus A$

## ZADANIE 5

Uprość wyrażenie  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ .

## ZADANIE 6

Uzasadnij, że liczby  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$  i  $1 - \sqrt{2}$  są liczbami przeciwnymi.

## ZADANIE 7

Rozwiąż nierówność  $|5 - x| + 12 \geq |2 - 3x|$ .

## ZADANIE 8

Stosując własności wartości bezwzględnej rozwiąż nierówność:  $||x - 1| - 2| < 1$ .

## ZADANIE 9

Rozwiąż nierówność  $||3x - 7| - |5 - 2x| + |x|| < 21$ .

## ZADANIE 10

Rozwiąż nierówność  $|x| + \sqrt{x^2 - 2x + 1} \leq 2 - x$ .

## ZADANIE 11

Rozwiąż równanie  $||x - 3| - 2| = 1$ .

## ZADANIE 12

Uprość wyrażenie

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}.$$

## ZADANIE 13

Uzasadnij, że dla każdej liczby  $x \in (-1; 5)$  wyrażenie  $\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + 2\sqrt{x^2 - 12x + 36}$  ma stałą wartość.

## ZADANIE 14

Uzasadnij, że  $61^{16} < 18^{24}$ .

## ZADANIE 15

Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste  $x$  i  $y$  spełniają warunek

$$\frac{x^6 + y^6}{2} = x^3 + y^3 - 1,$$

to  $x = y = 1$ .

## ZADANIE 16

Dane są  $x = 2 - \sqrt{2}$  i  $y = 5\sqrt{2} + 1$ . Oblicz  $\frac{x}{y}$ .

## ZADANIE 17

Wykaż, że liczba  $a = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5}$  jest całkowita.

## ZADANIE 18

Wykaż, że dla  $a \in (2, 3)$  zachodzi równość  $\frac{\sqrt{a^2 - 6a + 9}}{3 - a} + \frac{\sqrt{a^2 - 4a + 4}}{a - 2} = 2$ .

## ZADANIE 19

Uzasadnij, że liczba  $\frac{\sqrt{9 - \sqrt{56}}}{\sqrt{2 - \sqrt{7}}}$  jest liczbą całkowitą.

## ZADANIE 20

Wykaż, że jeśli  $a + b + c = 0$ , to  $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} = abc$ .

ZADANIE 21

Wykaż, że jeśli  $x^2 + y^2 = 3$  i  $x + y = -2$ , to  $xy = \frac{1}{2}$ .

ZADANIE 22

Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{\sqrt{9x^2+6x+1}}{3x+1} + \frac{\sqrt{9x^2+6x^3+x^4}}{5x^2+15x}$  dla  $x \in (-\infty, -3)$ .

ZADANIE 23

Uzasadnij, że jeżeli  $a + b = 1$  i  $a^2 + b^2 = 7$ , to  $a^4 + b^4 = 31$ .

ZADANIE 24

Wykaż, że liczba  $a = 3^{27} + 3^{29}$  jest podzielna przez 30.

ZADANIE 25

Wykaż, że liczba  $\left( (1 + \sqrt{5})^3 + (1 - \sqrt{5})^3 \right)^2$  jest wymierna.

ZADANIE 26

Liczby dodatnie  $a$  i  $b$  spełniają równość  $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$ . Wykaż, że  $a = 2b$ .

ZADANIE 27

Doprowadź wyrażenie  $(x - 1)(x + 1) - 5(3x - 4)^2 - (2x + 3)(5 + x)$  do najprostszej postaci, a następnie oblicz jego wartość dla  $x = \sqrt{5}$

ZADANIE 28

Uzasadnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej  $n$  liczba  $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$  jest wielokrotnością liczby 10.

ZADANIE 29

Porównaj liczby  $a^b$  i  $b^a$ , gdzie  $a = \left[ (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} + (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \right]^2$ ,  $b = \frac{81^{-1} \cdot \sqrt{3}}{27^{-2} \cdot \sqrt[4]{9}}$ .

ZADANIE 30

Wykaż, że dla dowolnych liczb całkowitych  $a, b$  liczba  $x = (a - b)^2 - (a + b)^2$  jest podzielna przez 4.

ZADANIE 31

Oblicz wartość wyrażenia  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ , gdy  $x + \frac{1}{x} = 3$ .

ZADANIE 32

Oblicz wartość wyrażenia

$$\left( \frac{(y+z)^2 - x^2}{x(y+z)} \right) \cdot \frac{x+y+z}{2yz} \cdot \left( \frac{y+z-x}{xy+xz} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{(x+y+z)^2}$$

dla  $x = 1, y = \sqrt{5}, z = \sqrt{2}$ .

Rozwiązania zadań znajdziesz na stronie  
[HTTPS://ZADANIA.INFO/4636\\_5586R](https://zadania.info/4636_5586R)