V Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia drugiego
(9 stycznia 2010 r.)

1. Danych jest 21 liczb rzeczywistych. Wiadomo, że suma każdych jedenastu spośród tych liczb jest większa od sumy pozostałych dziesięciu. Wykaż, że wszystkie te liczby są dodatnie.

2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC = 60^\circ \quad \text{oraz} \quad CD < BC\,.$$

Na boku BC tego trapezu wybrano taki punkt E, że $EB = CD$. Wykaż, że $BD = AE$.

3. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby

$$n^2 + n + 1 \quad \text{oraz} \quad n^2 + n + 3$$

są pierwsze.

4. Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

5. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda krawędź boczna jest prostopadła do którejś krawędzi podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

Uwaga:
Proste prostopadłe w przestrzeni nie muszą się przecinać.