PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIA

POZIOM ROZSZERZONY

Zadanie 1. A.

Zadanie 2. B.

Zadanie 3. B.

Zadanie 4. B.

Zadanie 5. B.

Zadanie 6.

3	0	0

Zadanie 7.

$\log_7 50 = \frac{\log_{14} 50}{\log_{14} 7} = \frac{\log_{14}(5^2 \cdot 2)}{\log_{14}\left(\frac{14}{2}\right)} = \frac{\log_{14} 5^2 + \log_{14} 2}{\log_{14} 14 - \log_{14} 2} = \frac{2\log_{14} 5 + a}{1-a} = \frac{2b+a}{1-a}$ c. n. d.

Zadanie 8.

Przypuśćmy, że liczba rzeczywista a jest pierwiastkiem tego wielomianu.
Zatem $W(a) = a^4 - 4a^3 + 4a^2 + a^2 - 8a + 16 = (a^2 - 2a)^2 + (a - 4)^2 = 0$.
Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej a: $(a^2 - 2a)^2 \geq 0$ i $(a - 4)^2 \geq 0$ $W(a) = 0 \Leftrightarrow [(a^2 - 2a)^2 = 0$ i $(a - 4)^2 = 0] \Leftrightarrow [a(a - 2) = 0$ i $a - 4 = 0] \Leftrightarrow [(a = 0$ lub $a = 2)$ i $a = 4]$. Nie istnieje liczba rzeczywista a, która spełniałaby ostatnią koniunkcję. Wielomian ten nie ma pierwiastków.

Zadanie 9.

Zapiszmy równanie stycznej w postaci ogólnej $2x - y + 1 = 0$. Odległość środka okręgu od stycznej jest równa promieniowi, więc $r = \frac{|2\cdot(-3) - 0 + 1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \sqrt{5}$.
Równanie okręgu: $(x + 3)^2 + y^2 = 5$.

Zadanie 10.

Wykorzystajmy wiadomości dotyczące ciągu arytmetycznego, niech $a_1 = 10$ i $r = 2$.
Obliczmy $S_n = \frac{2\cdot 10 + (n-1)\cdot 2}{2} n = n^2 + 9n$. Równanie $n^2 + 9n = 300$ ma dwa rozwiązania $n_1 = \frac{-9-\sqrt{1281}}{2}$ oraz $n_2 = \frac{-9+\sqrt{1281}}{2} \approx 13{,}4$ nie są to liczby naturalne dodatnie.
$S_{13} = \frac{20 + 12\cdot 2}{2} \cdot 13 = 286$, w ciągu 13 dni Ania przeczyta 286 stron
$300 - 286 = 14$.
Ania książkę przeczyta w ciągu 14 dni, ostatniego dnia przeczyta 14 stron.

Zadanie 11.

Napiszmy równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.
$f'(x) = 3x^2 + 4x - 6$, $f'(1) = 1$
zatem szukana styczna ma równanie $y = x - 3$.

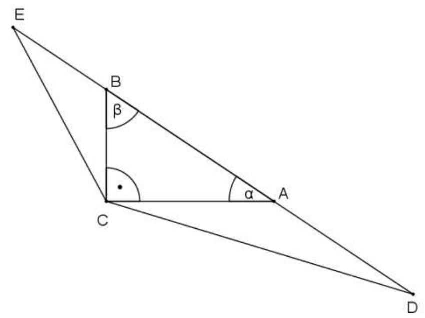
Wyznaczmy punkty wspólne wykresu funkcji i otrzymanej stycznej. W tym celu rozwiążemy równanie $x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = x - 3$

$x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = 0$

$(x-1)(x^2 + 3x - 4) = 0$ to równanie ma dwa różne rozwiązania $x_1 = 1, x_2 = -4$.

Zatem styczna w punkcie P ma z wykresem funkcji f jeszcze jeden punkt wspólny Q = $(-4, -7)$ c. n. d.

Zadanie 12.



Wprowadźmy oznaczenia na rysunku.

$|\measuredangle CAD| = 180^0 - \alpha$

trójkąt ACD jest równoramienny (|AC| = |AD|)

$|\measuredangle ACD| = \frac{180^0 - (180^0 - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$,

analogicznie pokażemy, że $|\measuredangle BCE| = \frac{\beta}{2}$

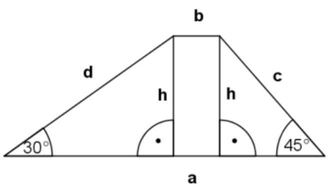
zatem $|\measuredangle ECD| = 90^0 + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^0 + \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 + 45^0 = 135^0$

|ED| = |EB| + |BA| + |AD| = |BC| + |BA| + |AC| = 20 cm

niech R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie CDE

z twierdzenia sinusów $2R = \frac{|ED|}{\sin 135^0} = \frac{20}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, stąd R = $10\sqrt{2}$ cm, pole koła opisanego na trójkącie CDE jest równe 200π cm^2.

Zadanie 13.



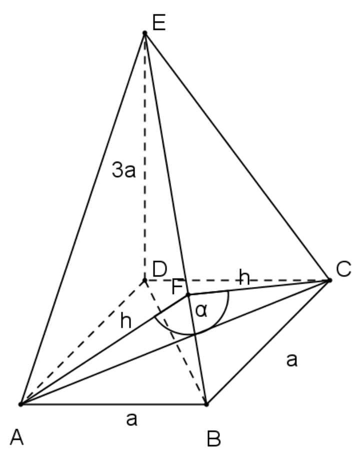
Trapez jest opisany na okręgu o promieniu r, więc a + b = c + d i h = 2r

$\frac{h}{c} = \sin 45^0$, stąd c = $h\sqrt{2}$

$\frac{h}{d} = \sin 30^0$, stąd d = 2h

$\frac{a+b+c+d}{2r} = \frac{2(c+d)}{h} = \frac{2(2h+h\sqrt{2})}{h} = 4 + 2\sqrt{2}$ c. n. d.

Zadanie 14.



$|AE| = |EC| = \sqrt{(3a)^2 + a^2} = a\sqrt{10}$ (a > 0)

$|BE| = \sqrt{(3a)^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{11}$

trójkąty ABE i BCE są przystającymi trójkątami prostokątnymi

$P_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AE| = \frac{1}{2} \cdot |BE| \cdot h$

$a \cdot a\sqrt{10} = a\sqrt{11} \cdot h$ stąd $h = a\sqrt{\frac{10}{11}}$

z twierdzenia cosinusów w trójkącie ACF otrzymamy

$(a\sqrt{2})^2 = \left(a\sqrt{\frac{10}{11}}\right)^2 + \left(a\sqrt{\frac{10}{11}}\right)^2 - 2\left(a\sqrt{\frac{10}{11}}\right)^2 \cos\alpha$, stąd $\cos\alpha = -\frac{1}{10}$.

Zadanie 15.

Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$ jest zbiór liczb rzeczywistych. Sprawdźmy dla jakich $k \in R$ równanie $\frac{x^2-3x+1}{x^2+1} = k$ ma rozwiązanie w R.

$x^2 - 3x + 1 = kx^2 + k$, stąd $(k-1)x^2 + 3x + (k-1) = 0$

1^0 $k = 1$, równanie ma jedno rozwiązanie $x = 0$,

2^0 $k \neq 1$, równanie kwadratowe $(k-1)x^2 + 3x + (k-1) = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie, gdy $\Delta \geq 0$

$\Delta = 9 - 4(k-1)^2 \geq 0$ dla $k \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{5}{2} \rangle \setminus \{1\}$.

Uwzględniając obydwa przypadki wnioskujemy, że zbiorem wartości funkcji f jest $\langle -\frac{1}{2}; \frac{5}{2} \rangle$

c. n. d.

Zadanie 16.

Wprowadźmy oznaczenia:

A – wśród wylosowanych liczb będzie liczba 5

B – suma wylosowanych liczb będzie parzysta

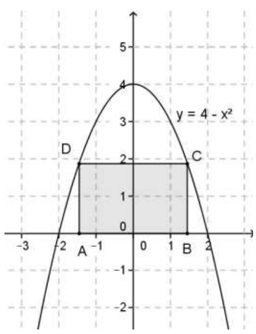
Mamy obliczyć $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{|A\cap B|}{|B|}$.

Zdarzeniu B sprzyjają kombinacje złożone z dwóch liczb parzystych lub dwóch liczb nieparzystych, zatem $|B| = \binom{7}{2} + \binom{8}{2} = 49$.

Zdarzeniu A sprzyjają kombinacje złożone z liczby 5 i liczby nieparzystej, $|A \cap B| = 1 \cdot 7 = 7$.

$P(A|B) = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$.

Zadanie 17.



Wprowadźmy oznaczenia na rysunku. Niech B = (x, 0), gdzie $x \in (0,2)$, wtedy A = (– x, 0), C = (x, 4 – x^2), D = (– x , 4 – x^2), |AB| = 2x, |BC| = 4 – x^2, pole prostokąta P(x) = 2x · (4 – x^2) = 8x – $2x^3$.

Rozważmy funkcję f(x) = 8x – $2x^3$, $x \in (0,2)$.

f'(x) = 8 – $6x^2$, $x \in (0,2)$

f'(x) = 0 dla x = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, f'(x) > 0 dla x $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, f'(x) < 0 dla x $\in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$.

Zatem funkcja f jest ciągła w przedziale $(0,2)$, jest rosnąca w przedziale $\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\rangle$ i malejąca w przedziale $\left\langle\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$, zatem w punkcie x = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ przyjmuje wartość największą. |AB| = $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, |BC| = $4 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{8}{3}$ zatem przekątna ma długość $\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$.