

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

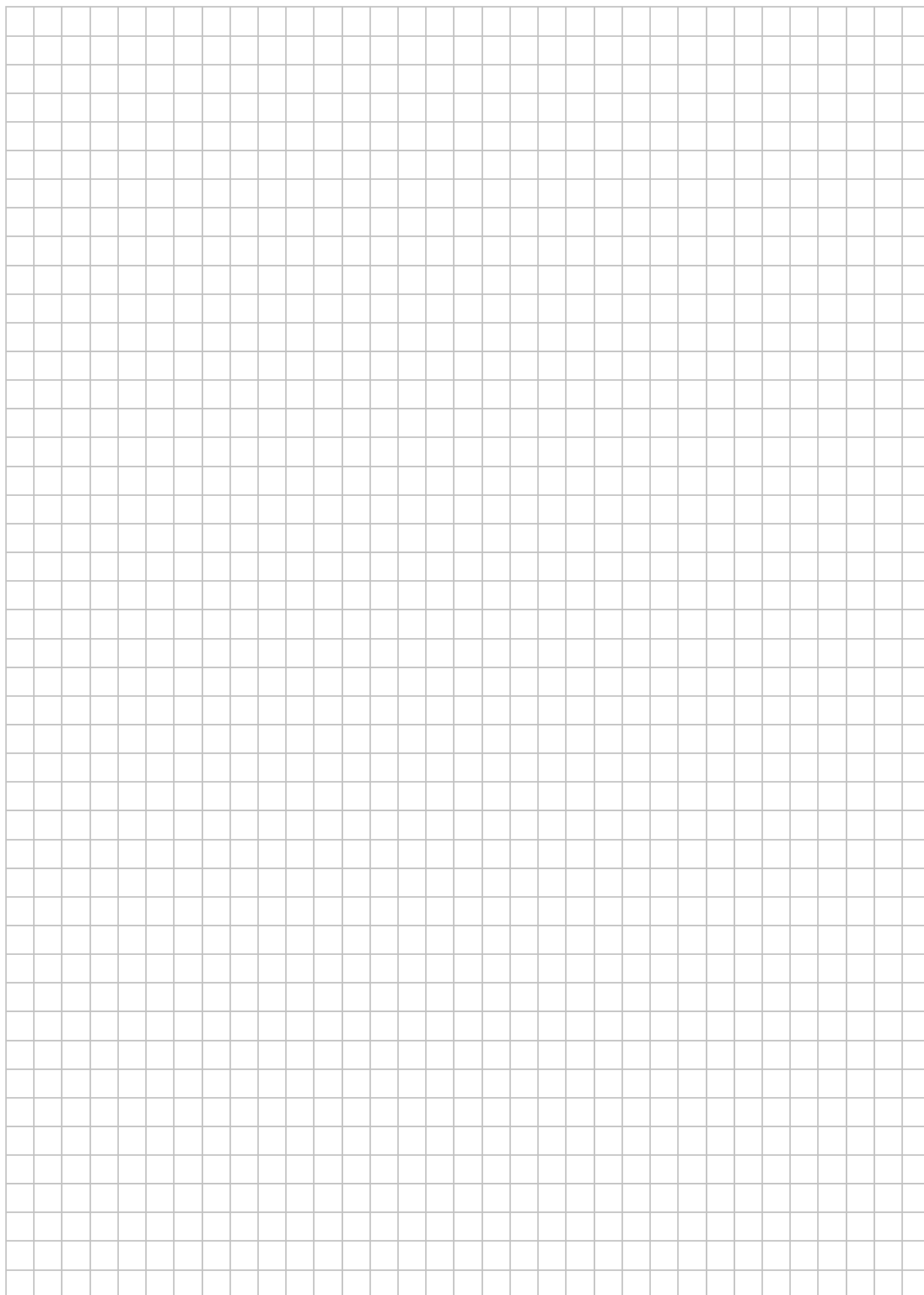
25 MARCA 2023

CZAS PRACY: 180 MINUT

ZADANIE 1 (2 PKT)

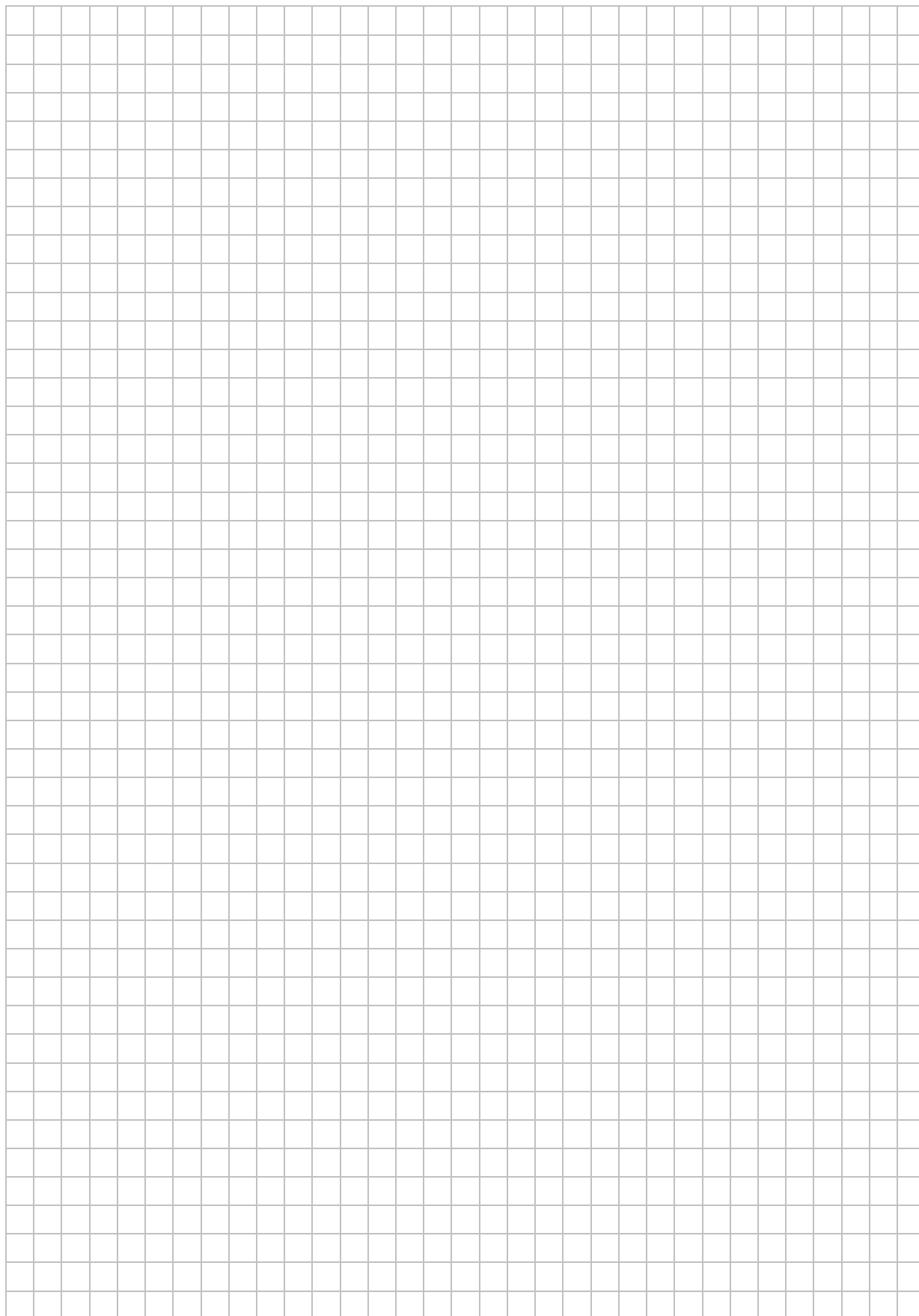
Oblicz

$$\frac{\log_4 6 \cdot \log_{36} 64}{\log_6 \sqrt[4]{216}}.$$



ZADANIE 2 (3 PKT)

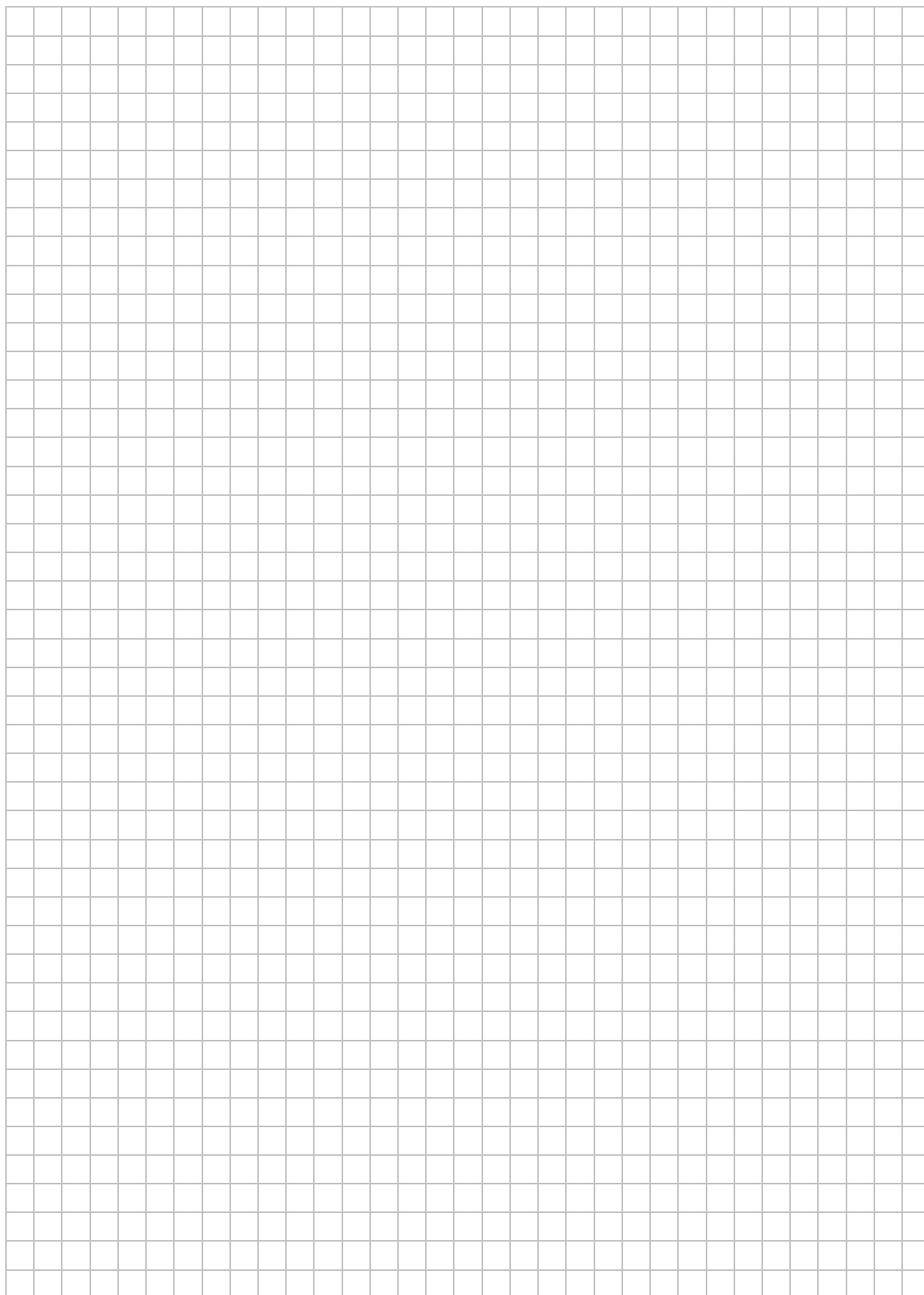
Prostą o równaniu $y = 0,25x$ przesunięto o wektor postaci $[1, m]$ w taki sposób, że przesunięta prosta jest styczna do wykresu funkcji $y = \frac{1-x^2}{x^2}$. Oblicz wartość m .



ZADANIE 3 (2 PKT)

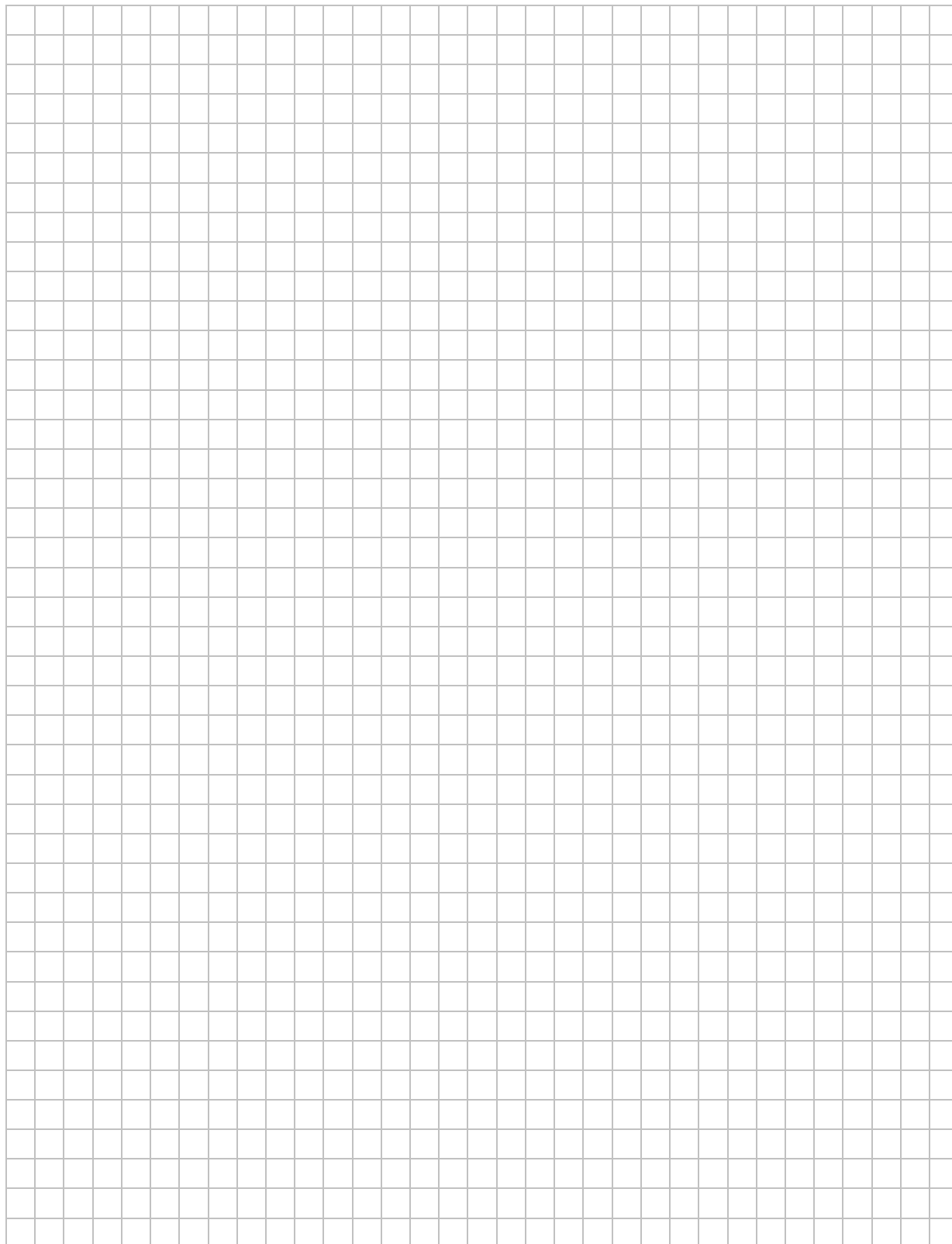
Oblicz granicę

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n + 4^{n-1} \cdot 3 + 4^{n-2} \cdot 3^2 + \dots + 4 \cdot 3^{n-1} + 3^n}{4^n}.$$



ZADANIE 4 (3 PKT)

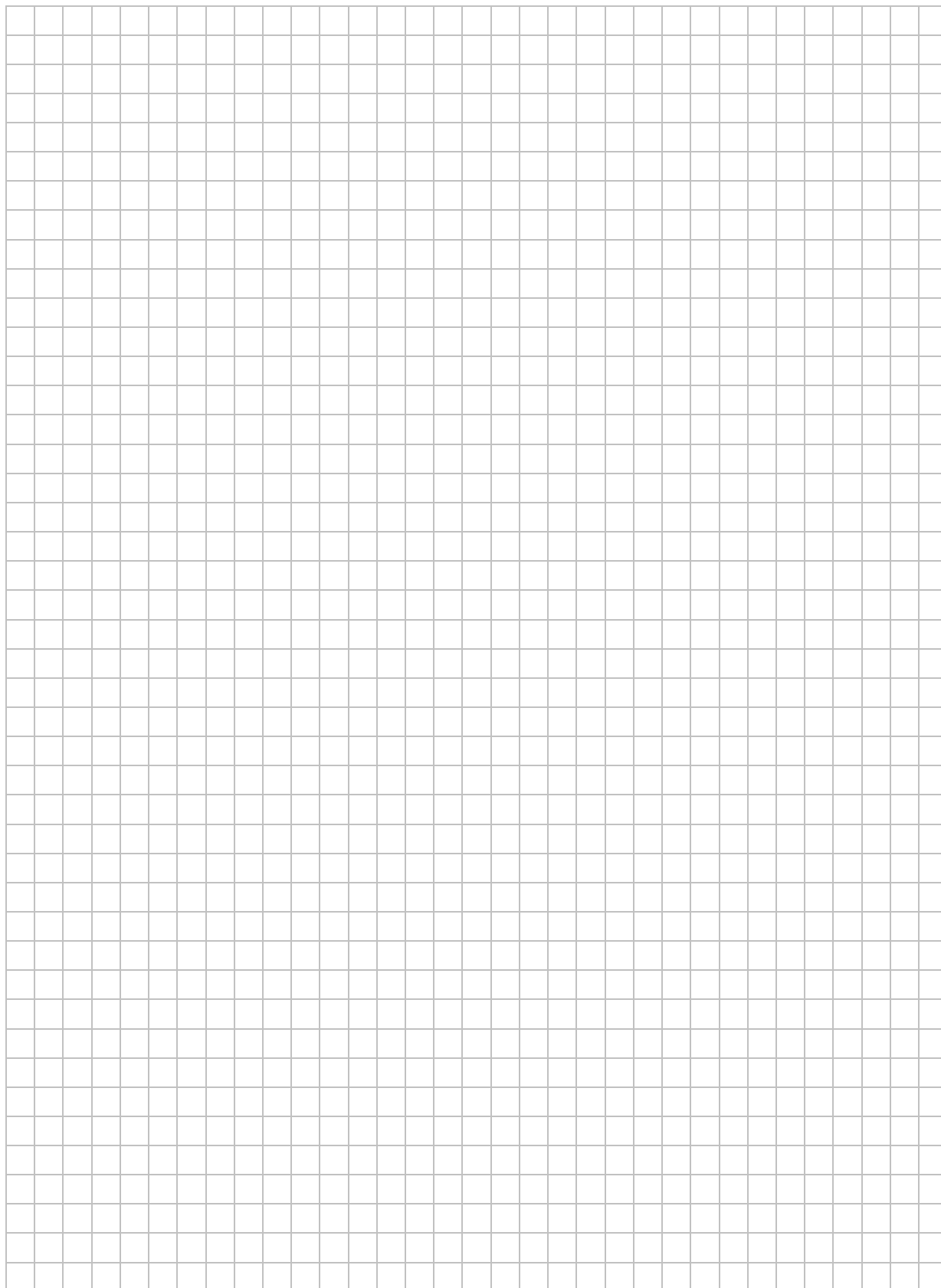
Maszyna napełnia torebki herbatą. Każda torebka ma zostać napełniona 200 g herbaty. Torebkę, która zawiera mniej niż 200 g herbaty, nazywamy torebką z niedowagą. Prawdopodobieństwo tego, że pojedyncza torebka napełniona przez tę maszynę jest z niedowagą, jest równe 0,05. Oblicz, ile torebek herbaty należy poddać kontroli, aby prawdopodobieństwo otrzymania w kontrolowanej partii przynajmniej jednej torebki z niedowagą było większe niż 0,7.



ZADANIE 5 (2 PKT)

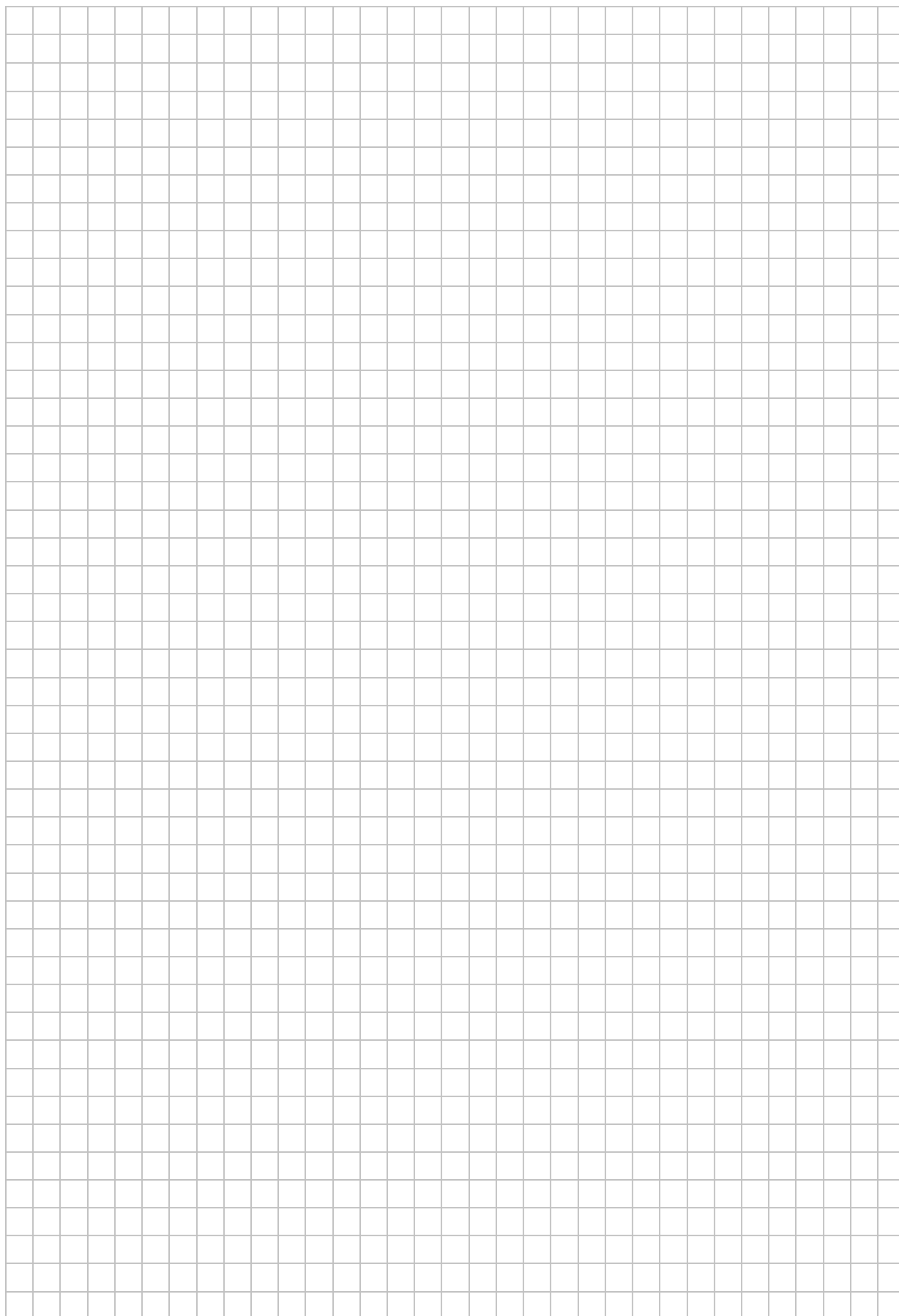
Wykaż, że jeżeli liczby dodatnie $x > y$ spełniają warunki: $x - y = p$ i $x^3 - y^3 = q$, to

$$x^2 - y^2 = \frac{\sqrt{12pq - 3p^4}}{3}.$$



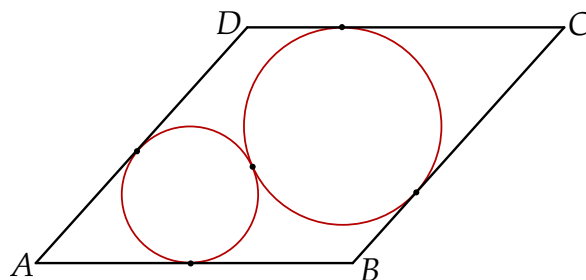
ZADANIE 6 (4 PKT)

Rozwiąż równanie $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ w przedziale $[0, 2\pi]$.

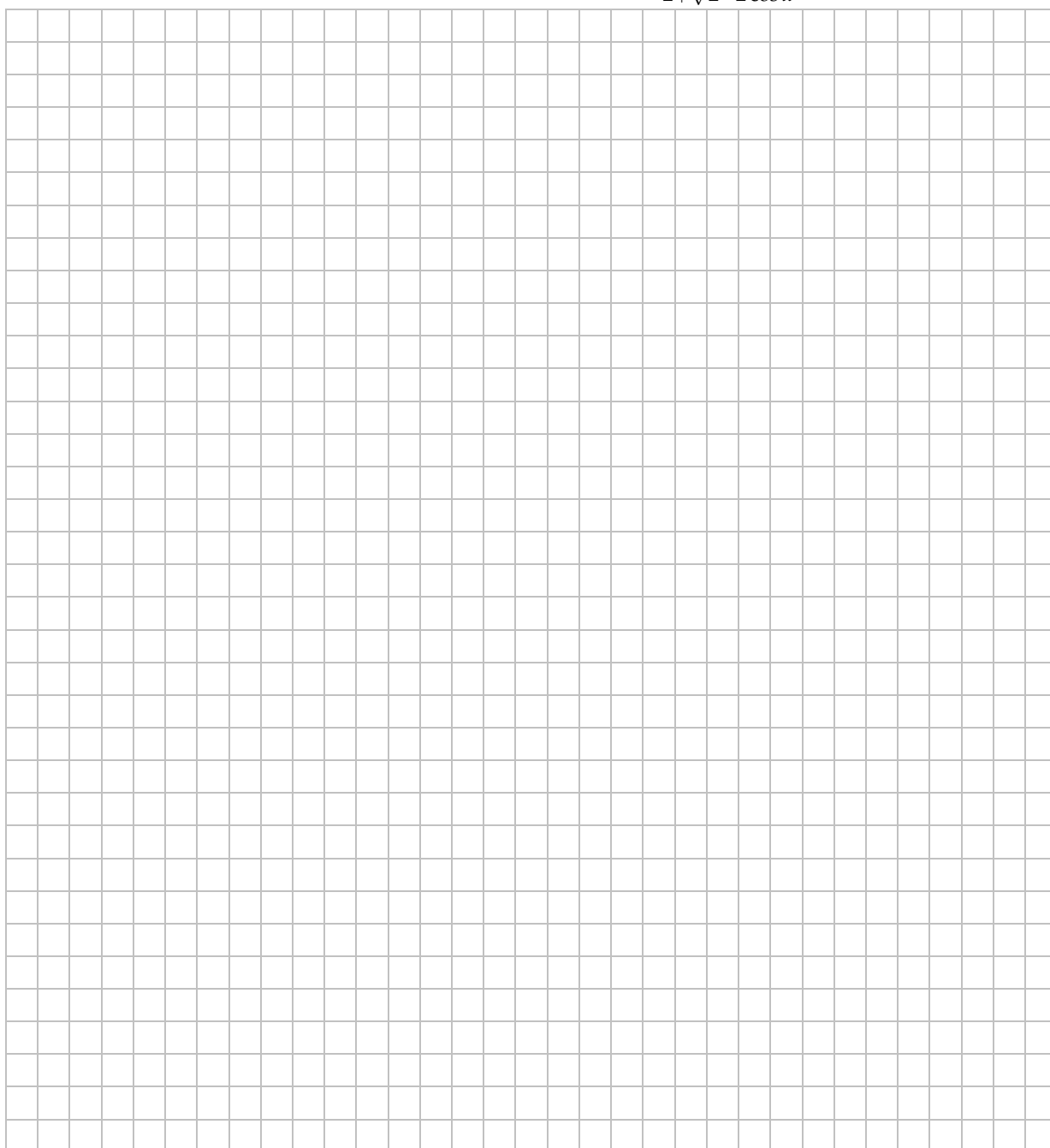


ZADANIE 7 (4 PKT)

W romb o boku a wpisano dwa okręgi w ten sposób, że okręgi te są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do dwóch sąsiednich boków rombu przecinających się pod kątem ostrym α (zobacz rysunek).

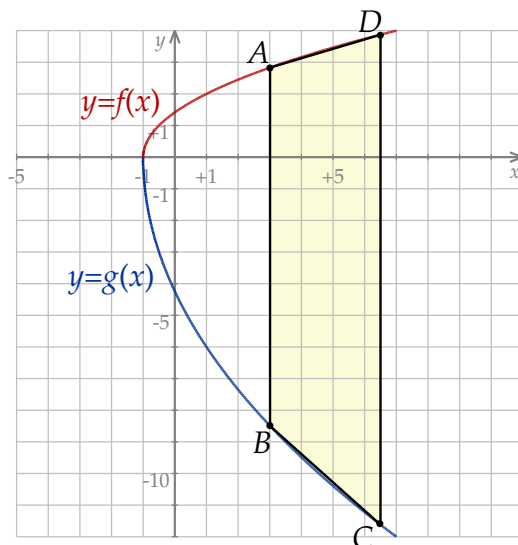


Udowodnij, że suma promieni tych okręgów jest równa $\frac{2a \sin \alpha}{2 + \sqrt{2 - 2 \cos \alpha}}$.



Informacja do zadań 8.1 i 8.2

Na przedziale $[-1, 7]$ określono dwie funkcje: $f(x) = \sqrt{2x+2}$ i $g(x) = -\sqrt{18x+18}$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy $ABCD$, których wierzchołki A i D leżą na wykresie funkcji f , a wierzchołki B i C leżą na wykresie funkcji g . Podstawy rozpatrywanych trapezów są równoległe do osi Oy (zobacz rysunek).

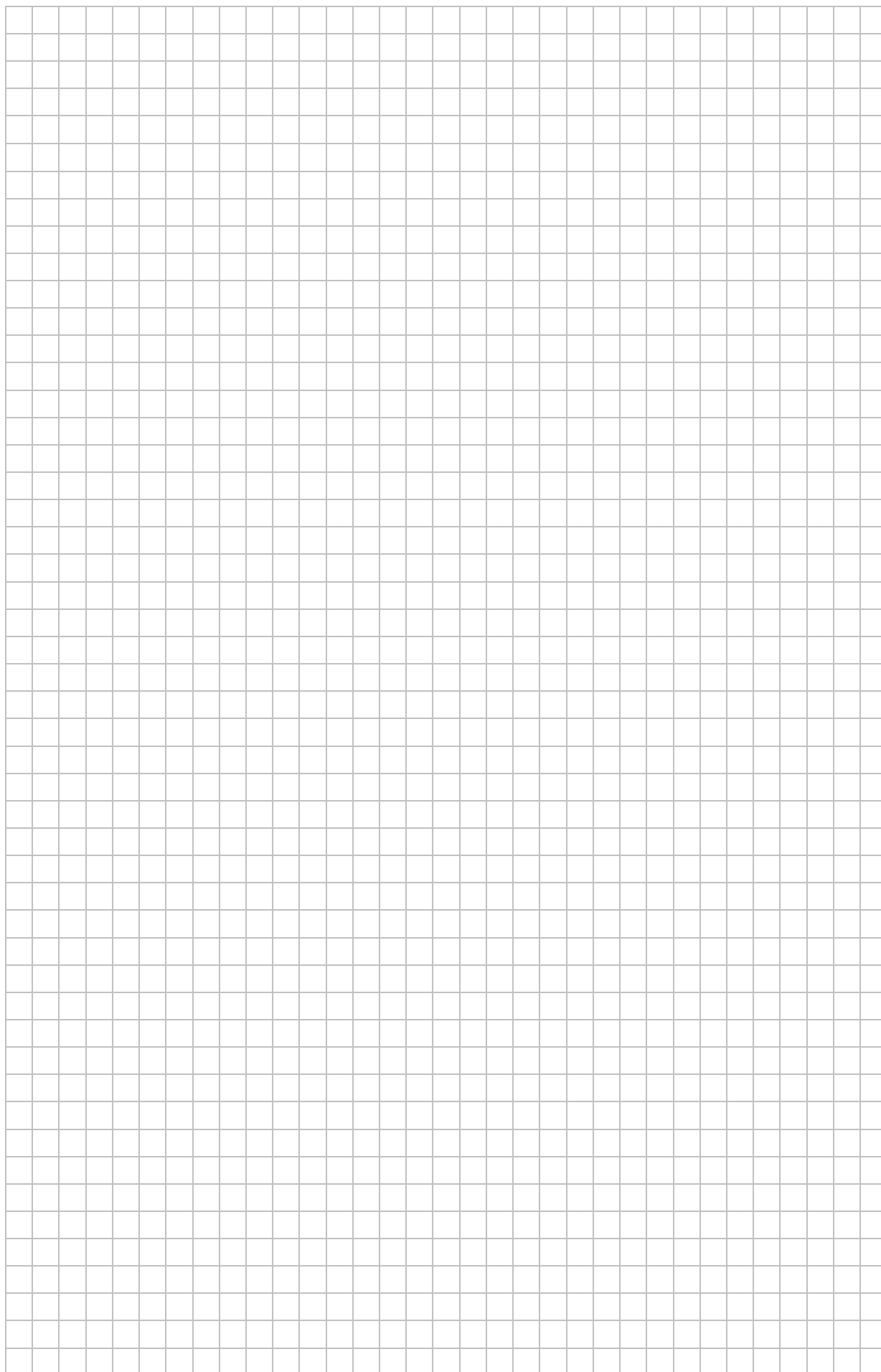


ZADANIE 8.1 (3 PKT)

Wykaż, że jeżeli pierwsza współrzędna punktów C i D jest równa 7, a druga współrzędna punktu A jest równa y , to pole trapezu $ABCD$ jest równe

$$P(y) = -y^3 - 4y^2 + 16y + 64.$$

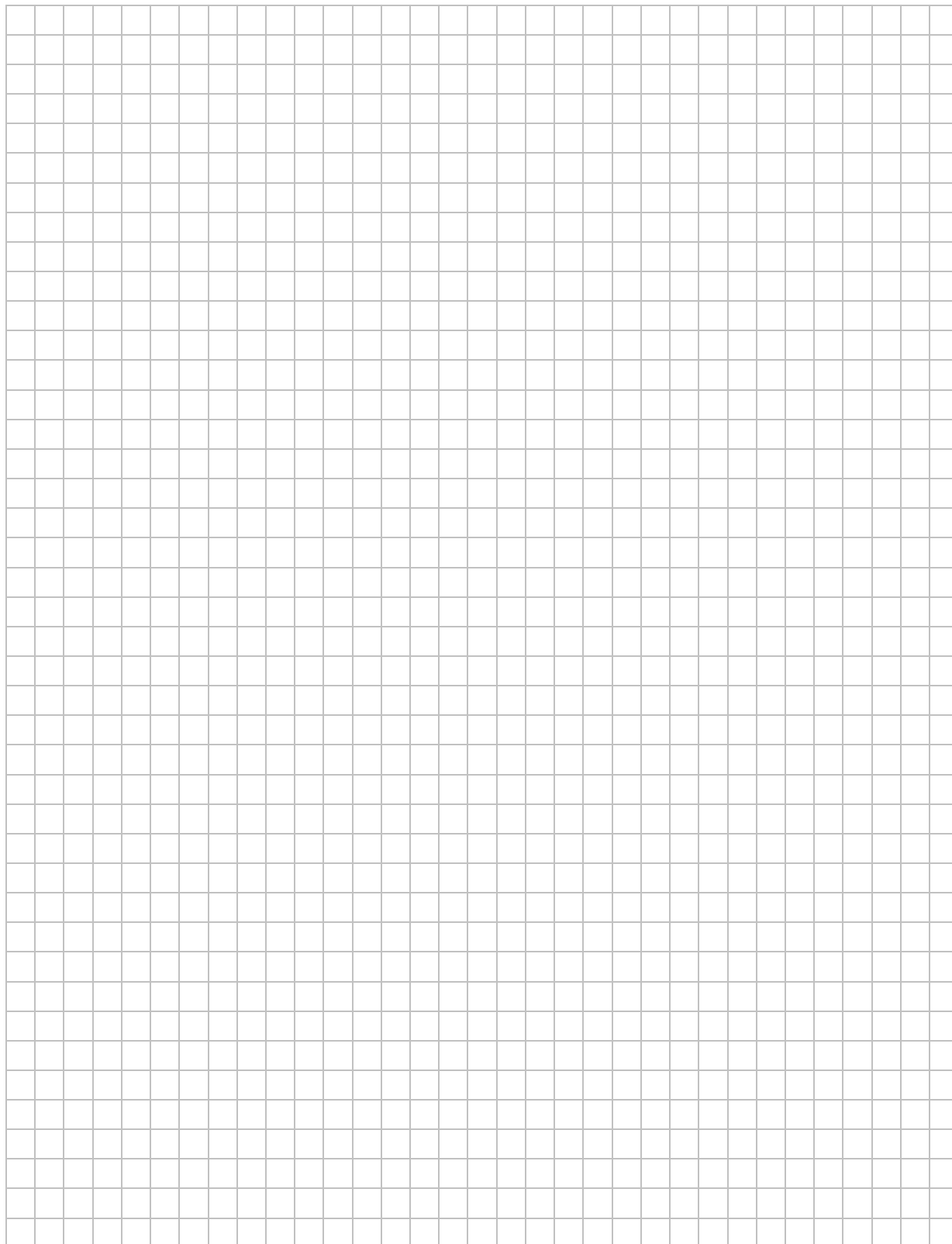




ZADANIE 8.2 (5 PKT)

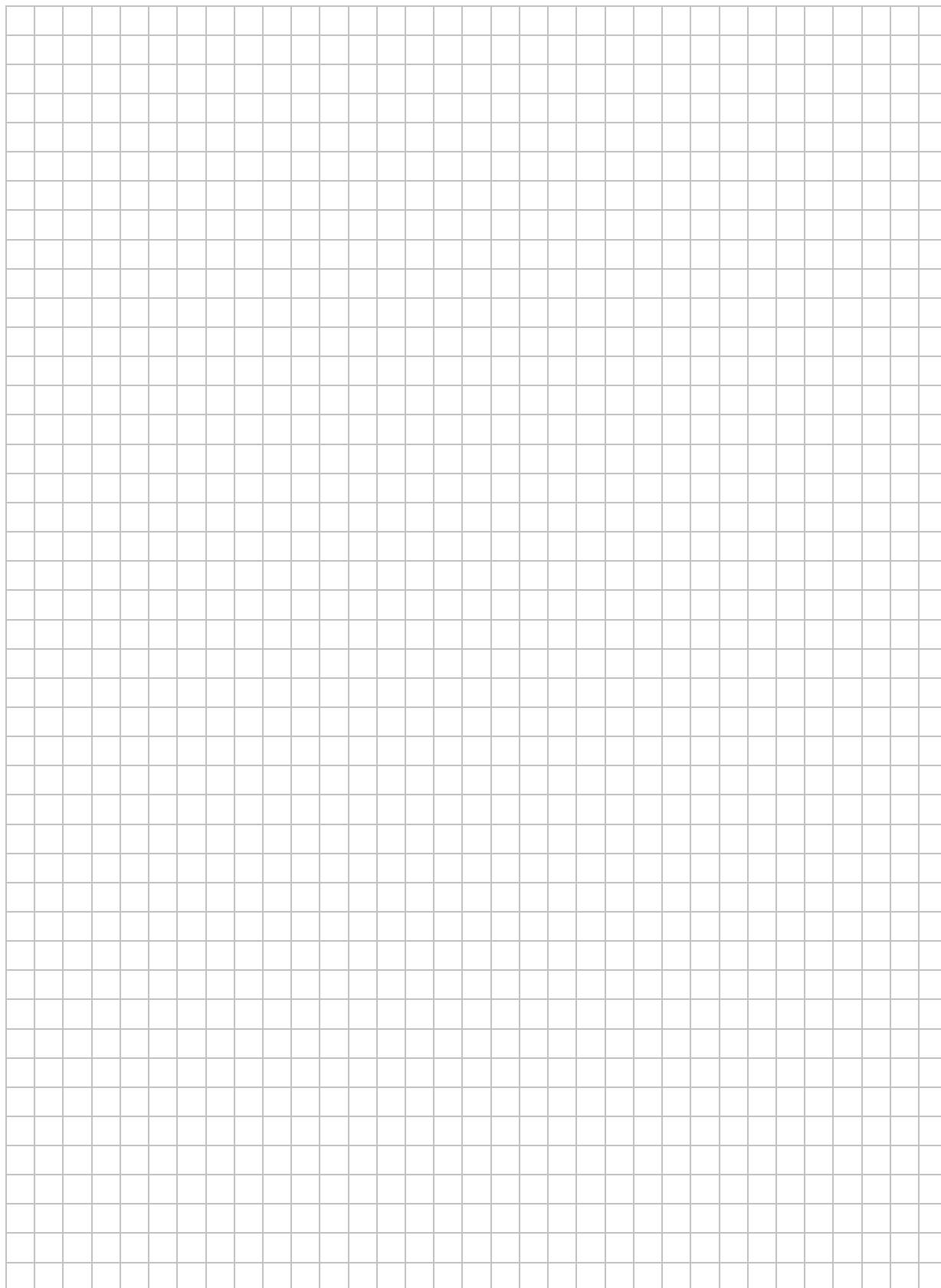
Oblicz współrzędne wierzchołków tego z rozpatrywanych trapezów, w którym $|CD| > |AB|$, i który ma największe możliwe pole. Oblicz to największe pole. Przy rozwiązywaniu zadania możesz skorzystać z tego, że jeżeli pierwsza współrzędna wierzchołka C trapezu $ABCD$ jest równa 7 , a druga współrzędna wierzchołka A jest równa y , to pole trapezu wyraża się wzorem

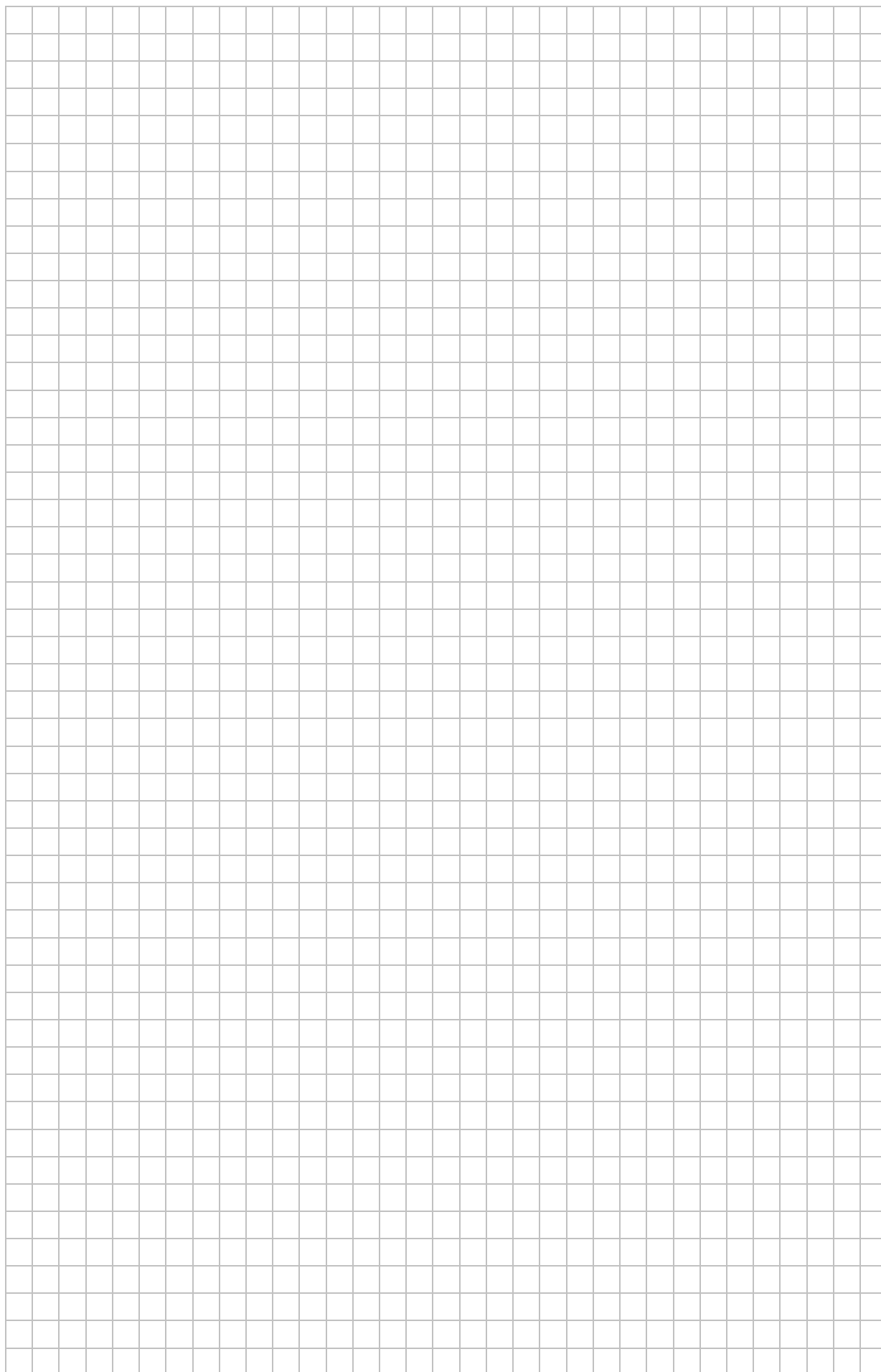
$$P(y) = -y^3 - 4y^2 + 16y + 64.$$



ZADANIE 9 (5 PKT)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny $ABCS$ o podstawie ABC . Krawędź podstawy tego ostrosłupa ma długość a . Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Przez środek K krawędzi CA i środek L krawędzi AB poprowadzono płaszczyznę π prostopadłą do płaszczyzny SBC . Oblicz pole otrzymanego przekroju.



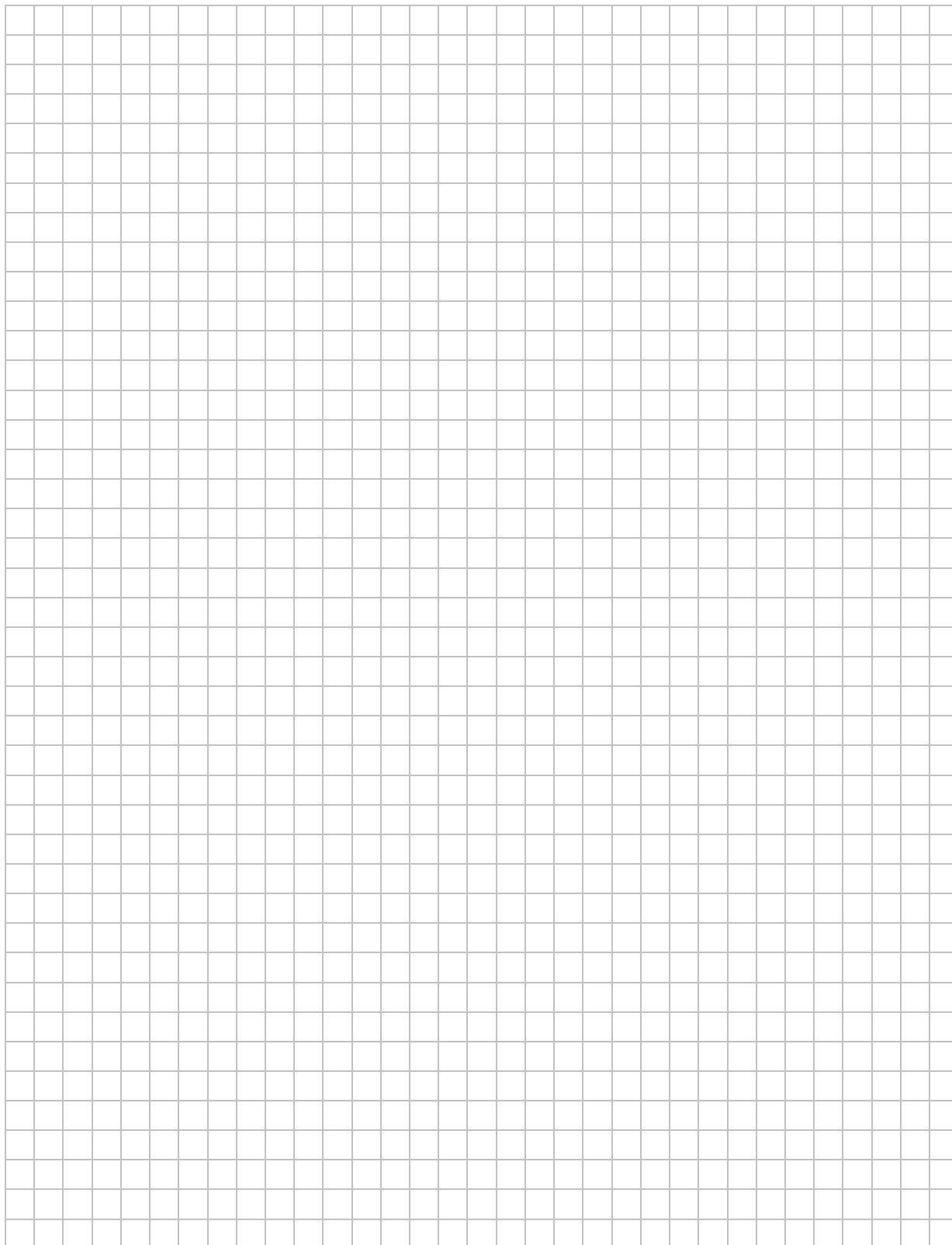


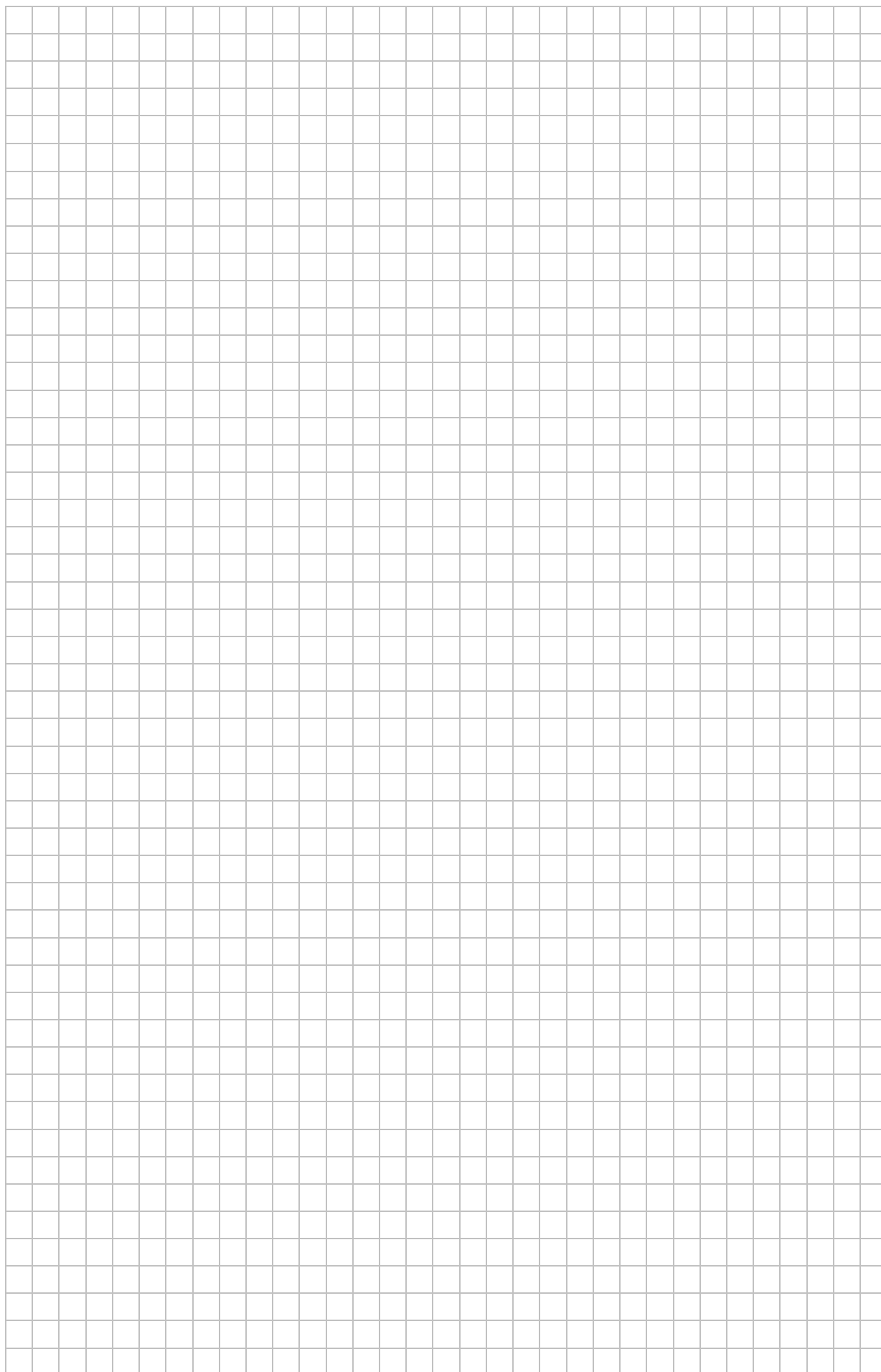
ZADANIE 10 (6 PKT)

Dane jest równanie

$$(x - 2) \cdot [(m - 7)x^2 + 2(m + 3)x - (2m + 3)] = 0$$

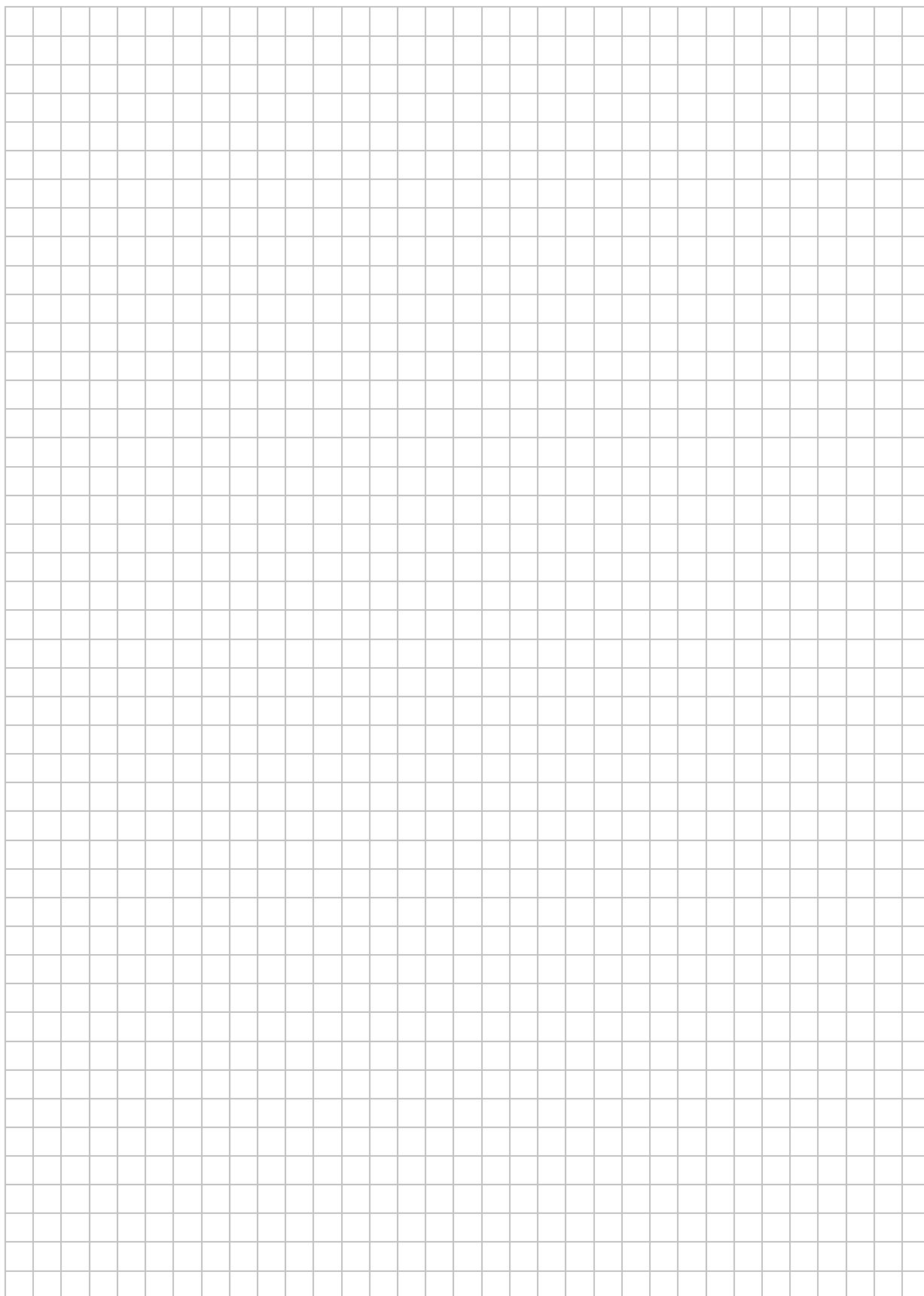
z niewiadomą x i parametrem $m \in \mathbb{R}$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których to równanie ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste tego samego znaku.

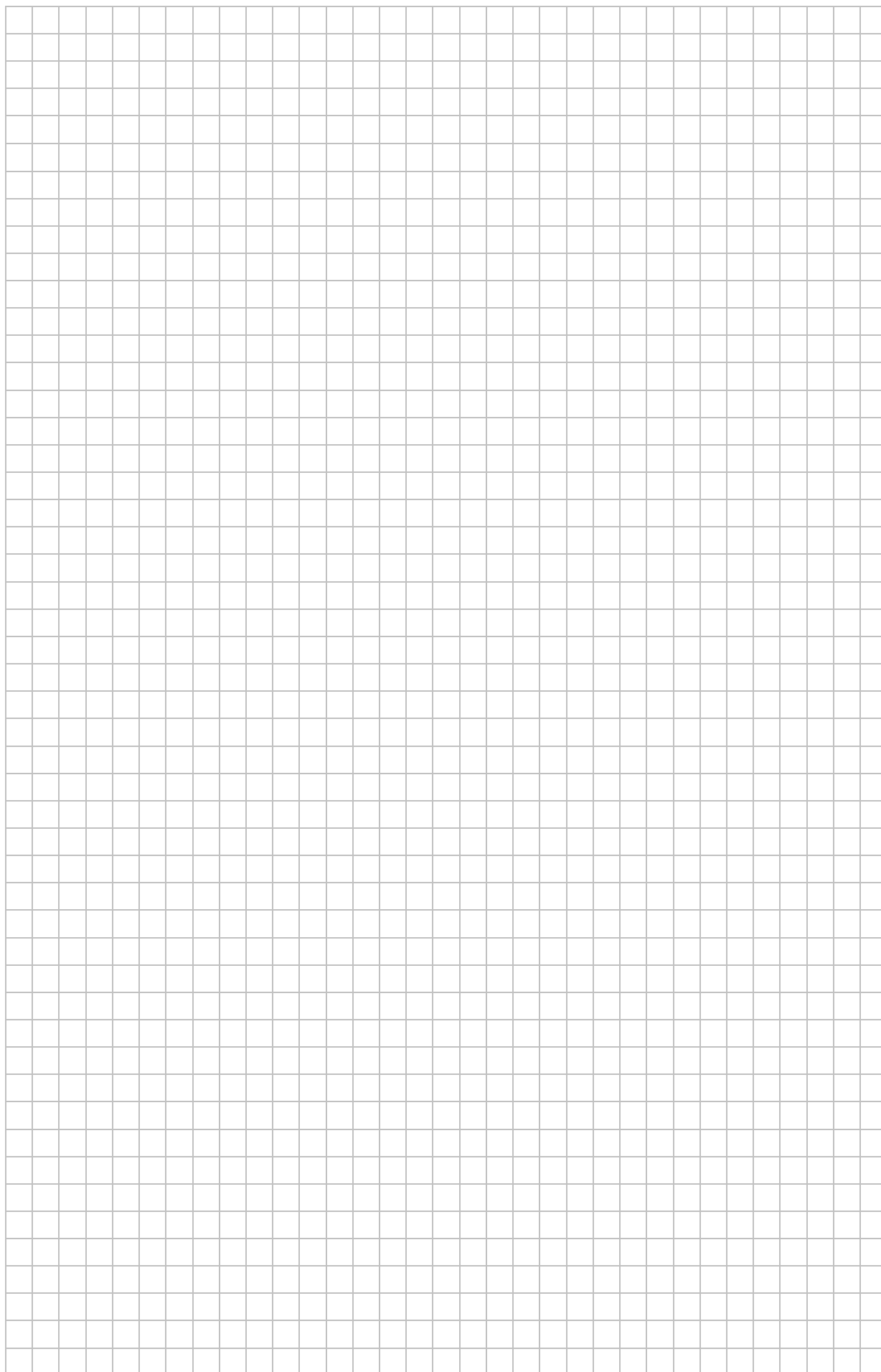




ZADANIE 11 (5 PKT)

Dane są 4 liczby, z których 3 pierwsze tworzą ciąg geometryczny, a 3 ostatnie tworzą ciąg arytmetyczny. Suma pierwszej i czwartej wynosi 22, a suma drugiej i trzeciej wynosi 4. Wyznacz te 4 liczby.





ZADANIE 12 (6 PKT)

W kartezjańskim układzie współrzędnych dany jest romb $ABCD$, którego bok CD i przekątna AC są zawarte w prostych o równaniach $y - x - 1 = 0$ i $y - 3x + 1 = 0$ odpowiednio. Promień okręgu wpisanego w romb $ABCD$ jest równy $2\sqrt{2}$, a środek tego okręgu leży poniżej osi Ox . Oblicz współrzędne punktu styczności okręgu wpisanego w romb $ABCD$ z jego bokiem BC .

