

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

ZADANIA.INFO

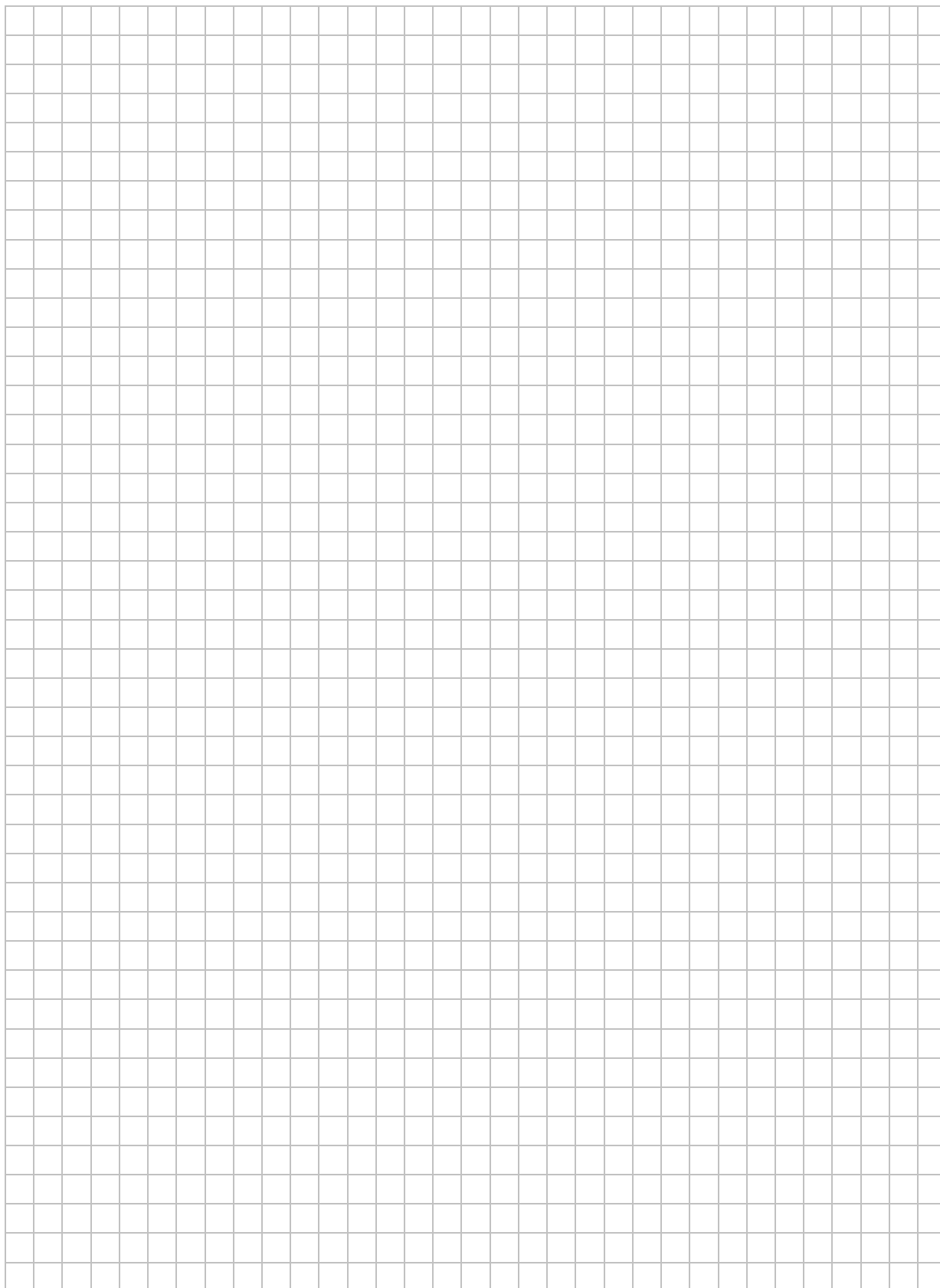
POZIOM ROZSZERZONY

2 MARCA 2024

CZAS PRACY: 180 MINUT

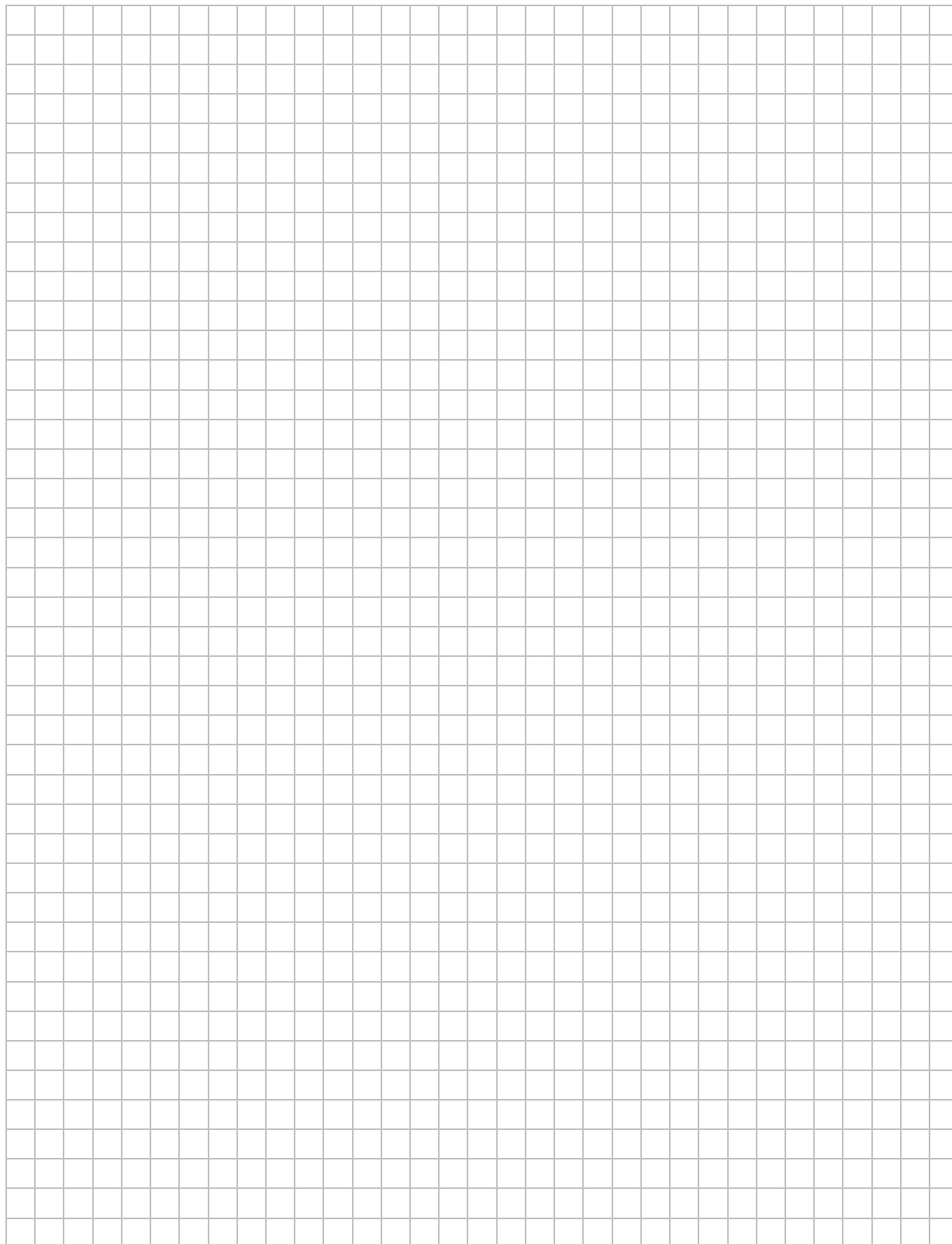
ZADANIE 1 (3 PKT)

W chwili początkowej masa substancji jest równa 20 g. Wskutek rozpadu cząsteczek tej substancji jej masa się zmniejsza. Po każdej kolejnej dobie ubywa 20% masy, jaka była na koniec doby poprzedniej. Oblicz, po ilu pełnych dobach masa tej substancji będzie po raz pierwszy mniejsza od $2^{40} \cdot 10^{-12}$ g.



ZADANIE 2 (3 PKT)

Karol i Antek grają w rzutki. Karol trafia w środek tarczy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, a Antek z prawdopodobieństwem $\frac{2}{5}$. Rzucamy symetryczną, sześcienną kostką do gry. Jeżeli wypadnie liczba podzielna przez 3, to Karol dwa razy rzuca do tarczy. W przeciwnym wypadku Antek dwa razy rzuca do tarczy. Oblicz prawdopodobieństwa zdarzenia polegającego na tym, że w żadnym z tych dwóch wykonanych rzutów nie zostanie trafiony środek tarczy.

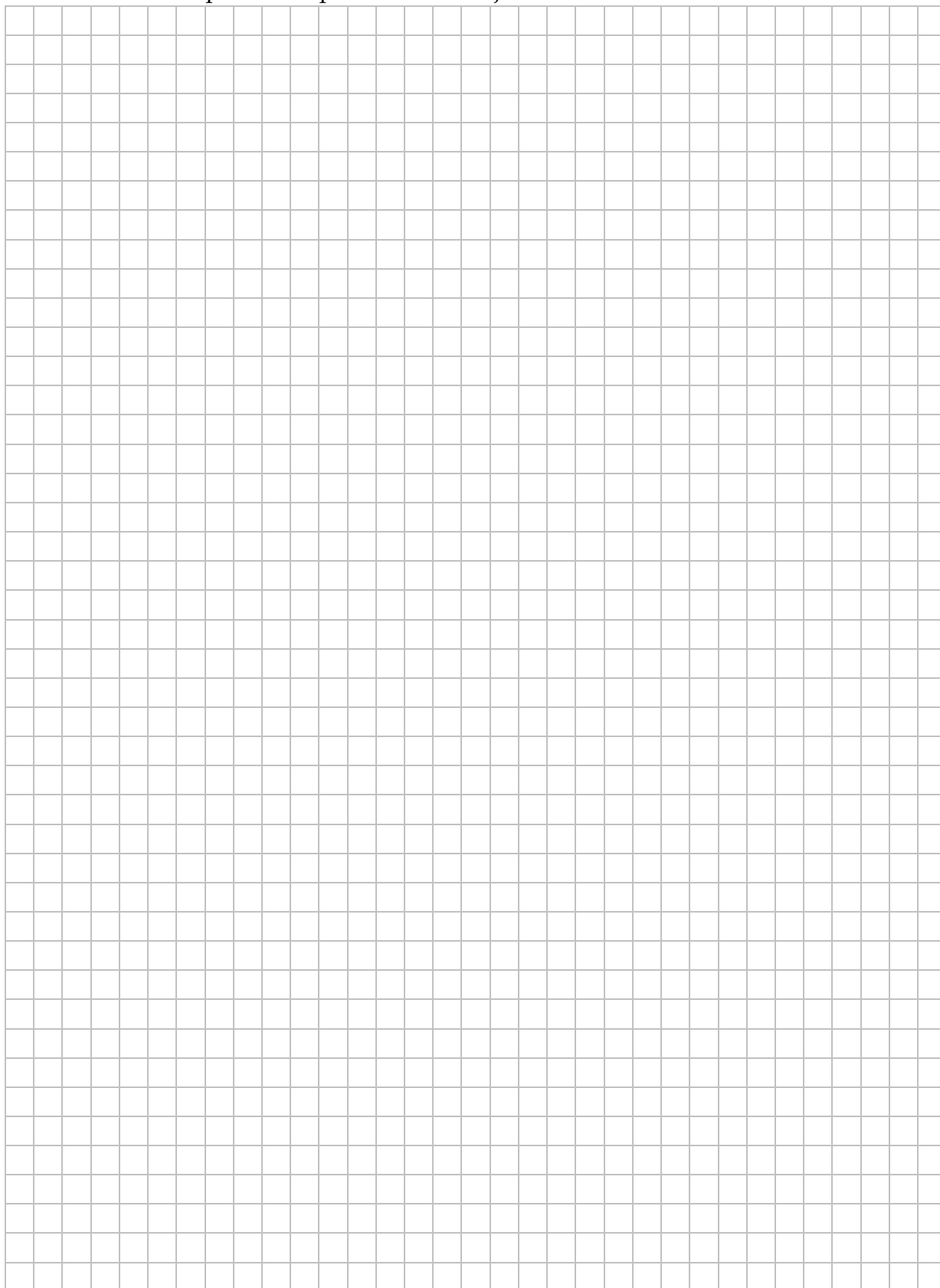


ZADANIE 3 (2 PKT)

Wykaż, że jeżeli pierwiastkiem wielomianu

$$W(x) = (kx - 3)(kx + 2)(kx - 12)(x + 8) + kx$$

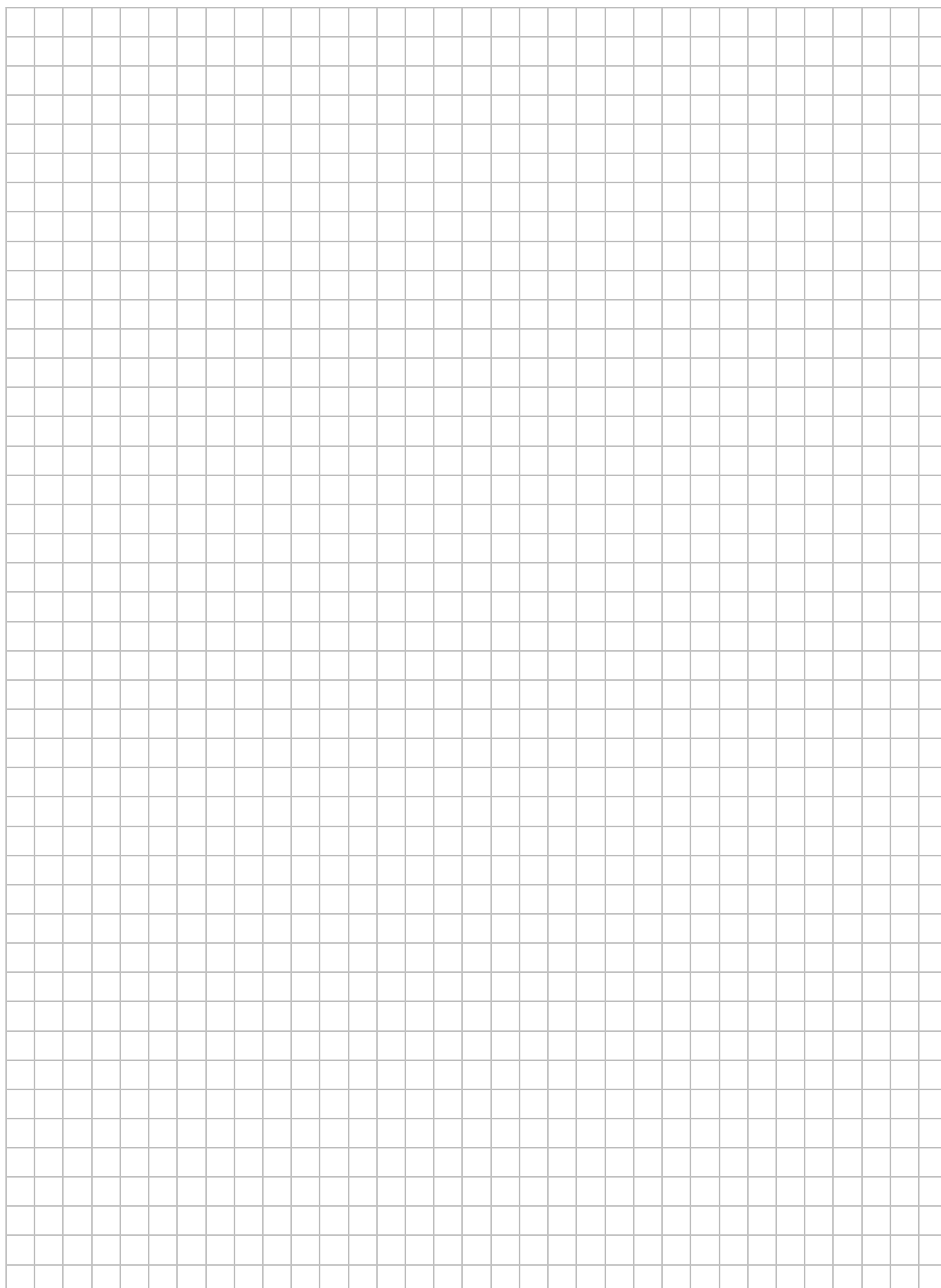
jest liczba całkowita podzielna przez 5, to k nie jest liczbą całkowitą.



ZADANIE 4 (3 PKT)

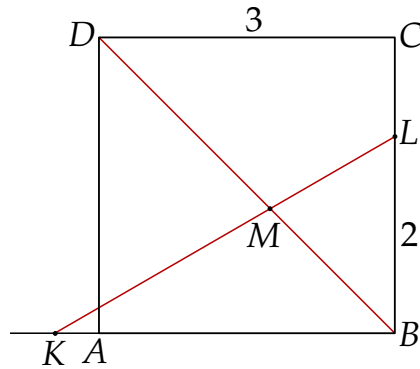
Oblicz granicę ciągu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^n}{5^n + 5^{n-1} \cdot 3 + 5^{n-2} \cdot 3^2 + \dots + 5 \cdot 3^{n-1} + 3^n}$$

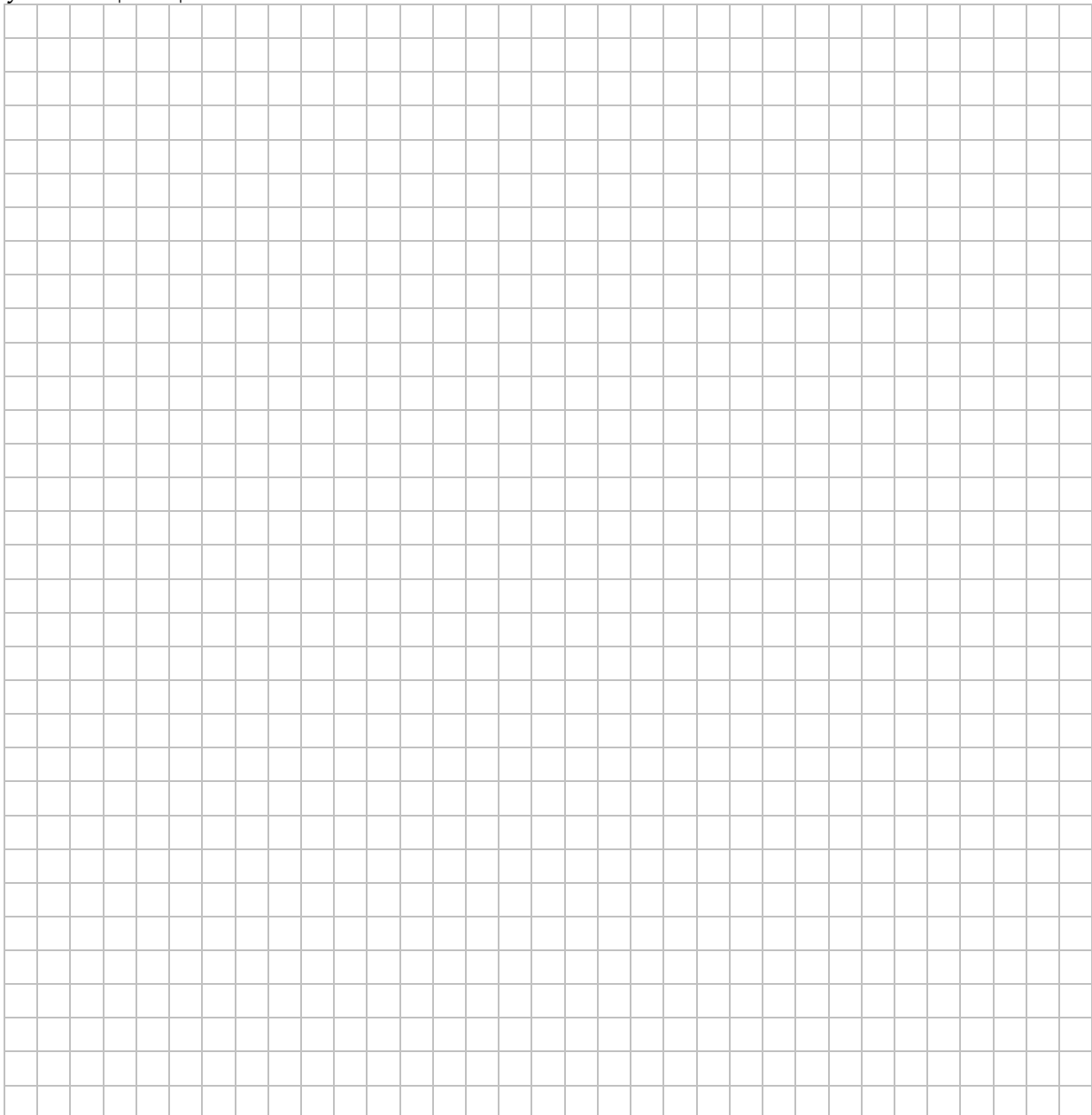


ZADANIE 5 (4 PKT)

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 3. Punkty K i L leżą na prostych – odpowiednio – AB i BC tak, że $|BK| = 2\sqrt{3}$ i $|BL| = 2$ (zobacz rysunek). Odcinek KL przecina przekątną BD tego kwadratu w punkcie M .



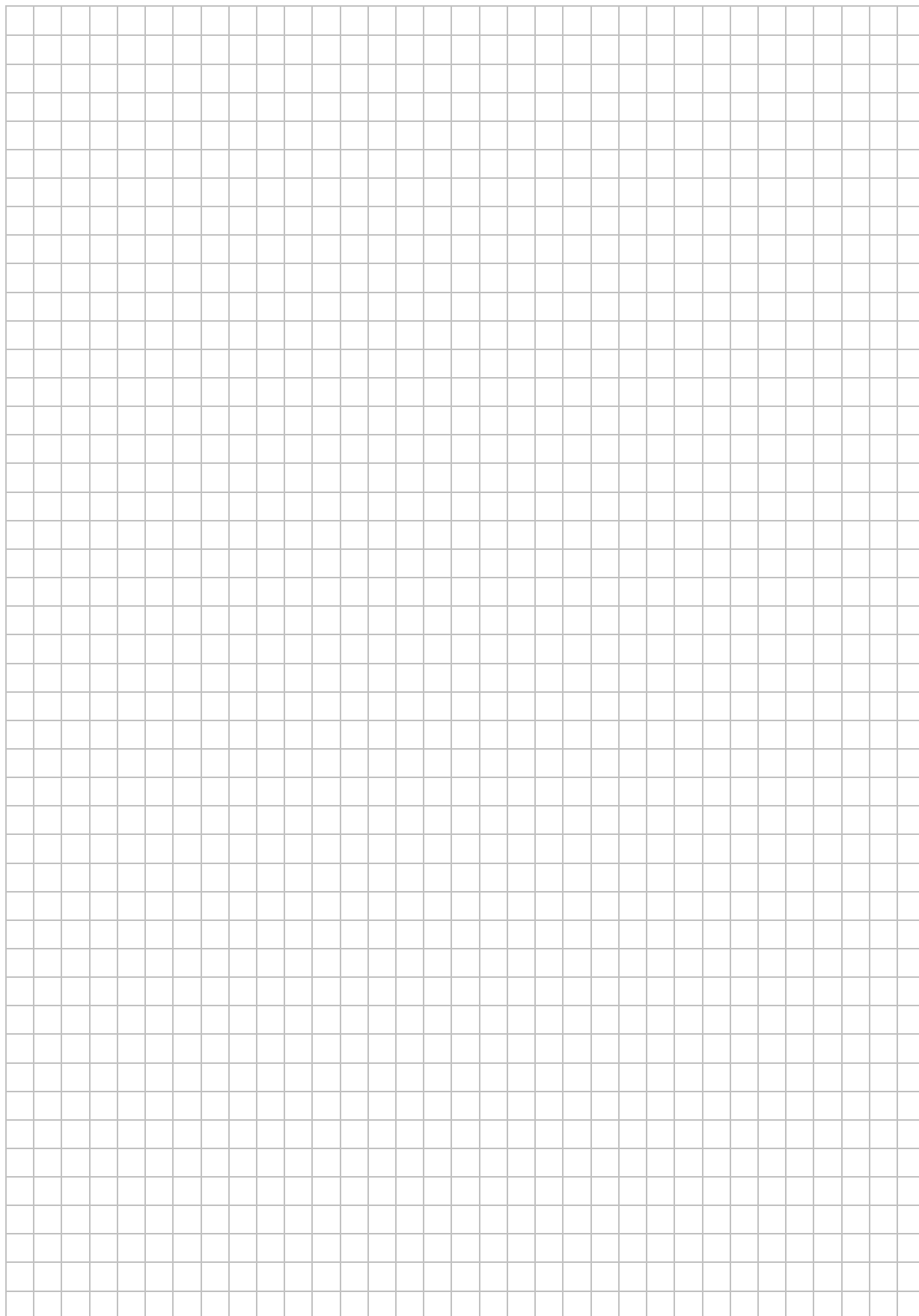
Wykaż, że $|MD| = \sqrt{6}$.





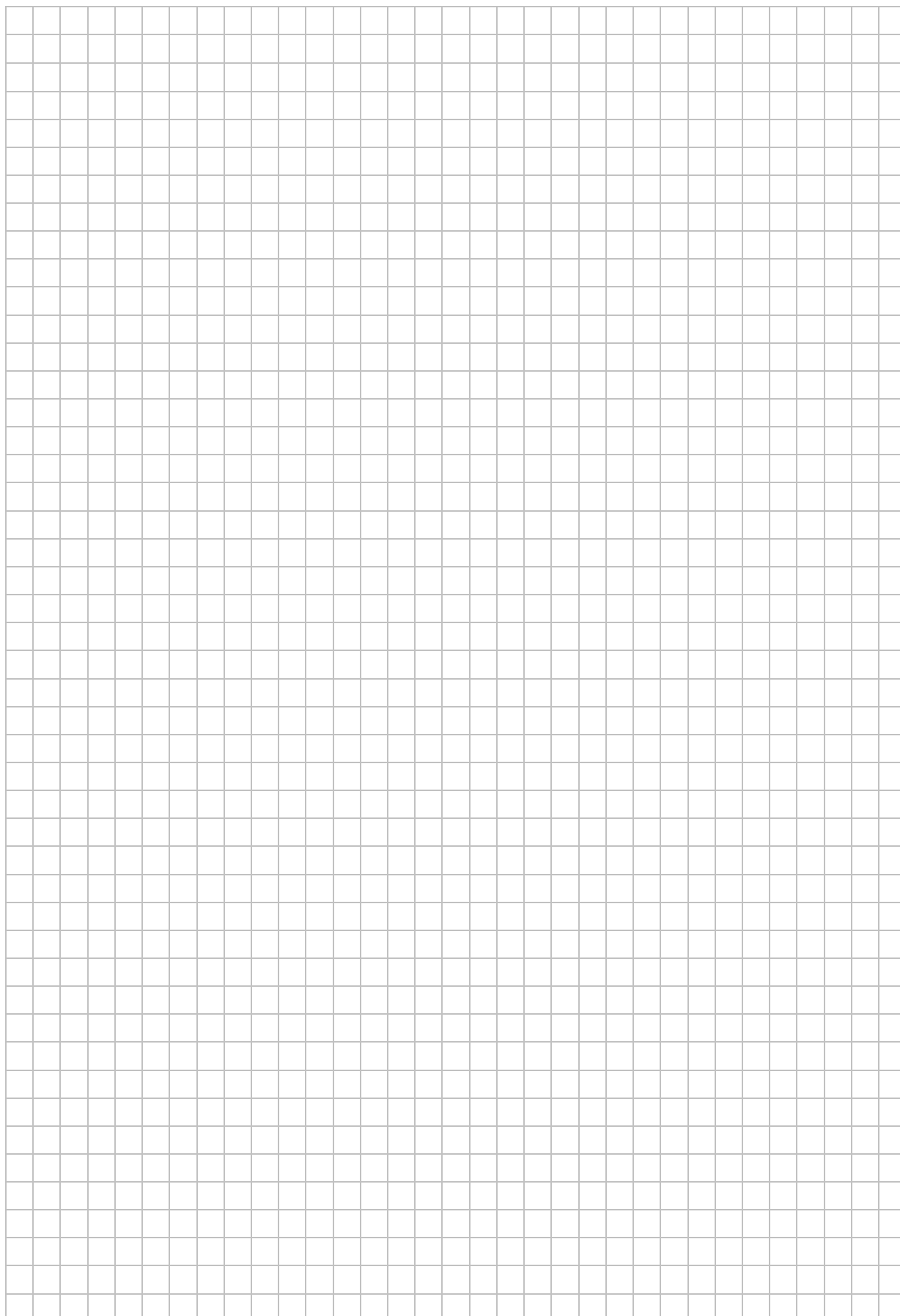
ZADANIE 6 (4 PKT)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 9x$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, i ustalonej liczby rzeczywistej a . Prosta $y = 17x - 16$ jest styczna do wykresu funkcji f . Oblicz a .



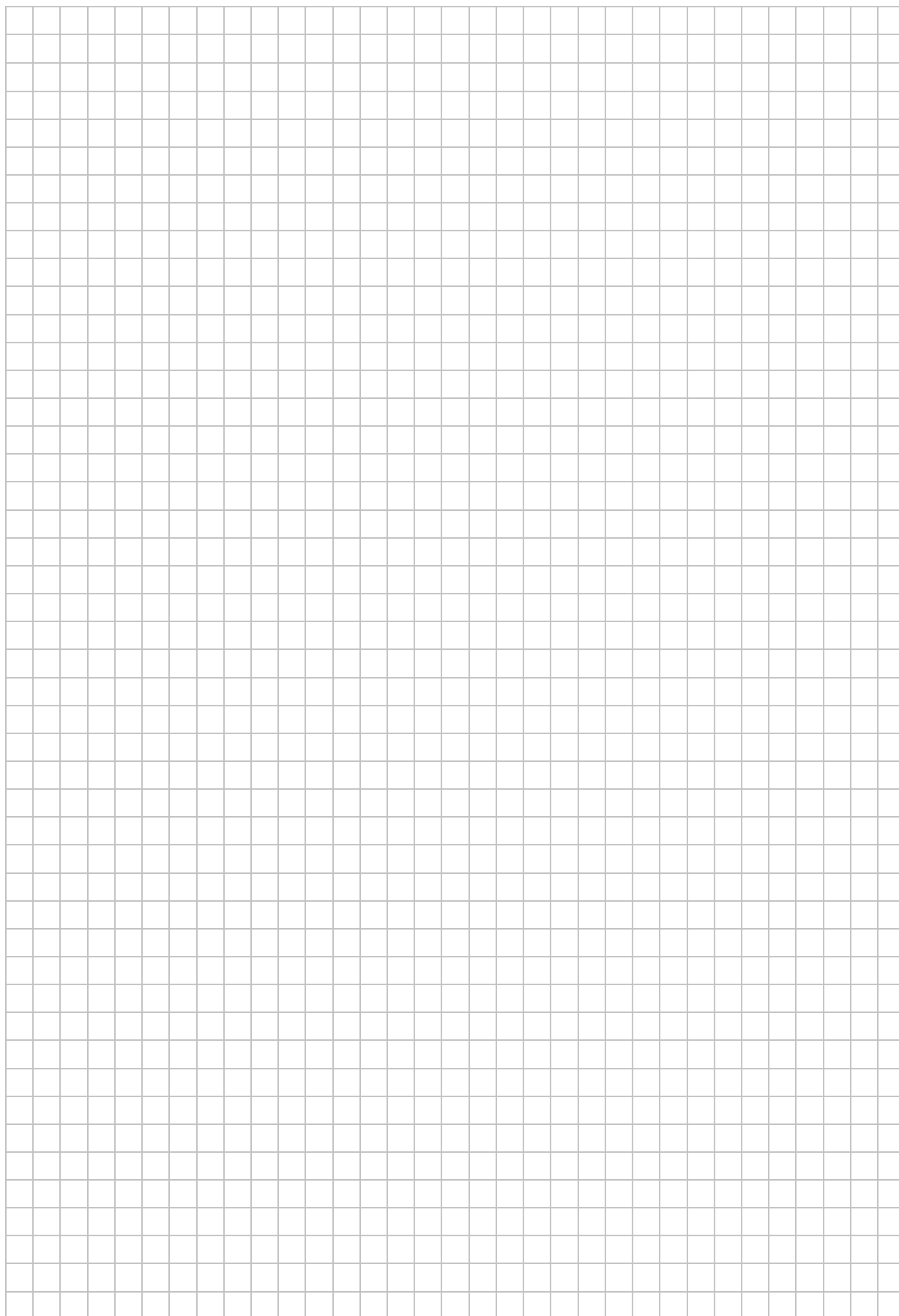
ZADANIE 7 (4 PKT)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + \sin 3x = 0$ w zbiorze $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



ZADANIE 8 (4 PKT)

Rozwiąż nierówność $\sqrt[3]{8 + 54x^2 - 36x - 27x^3} < \frac{1}{2} - \sqrt{9 + 4x^2 + 12x}$.





ZADANIE 10 (4 PKT)

Oblicz długość odcinka łączącego środki przeciwległych krawędzi czworoscianu foremnego o krawędzi długości a .

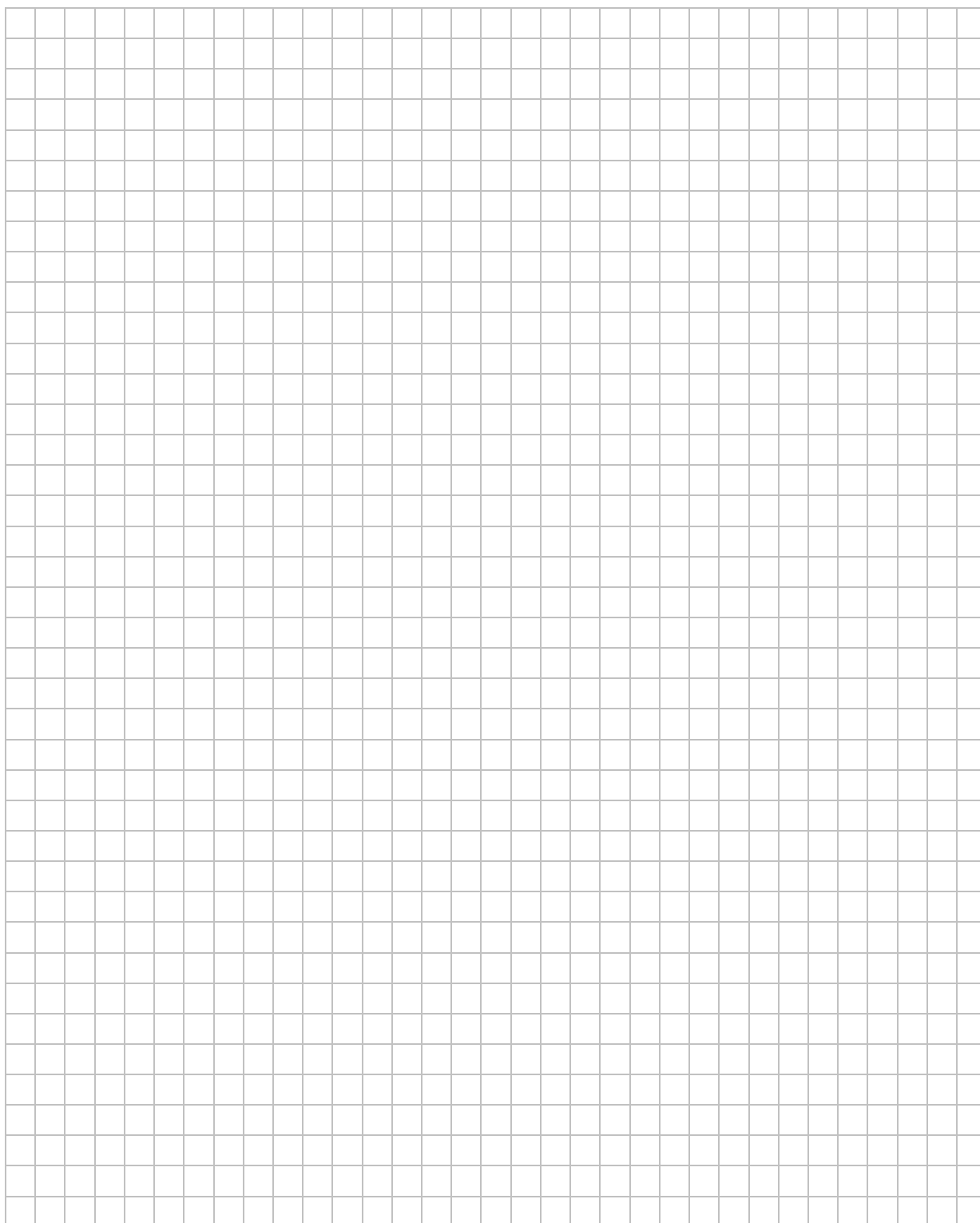


Informacja do zadań 11.1 i 11.2

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x) = -x^2 + 8x - 7$ dla dowolnej liczby rzeczywistej x .

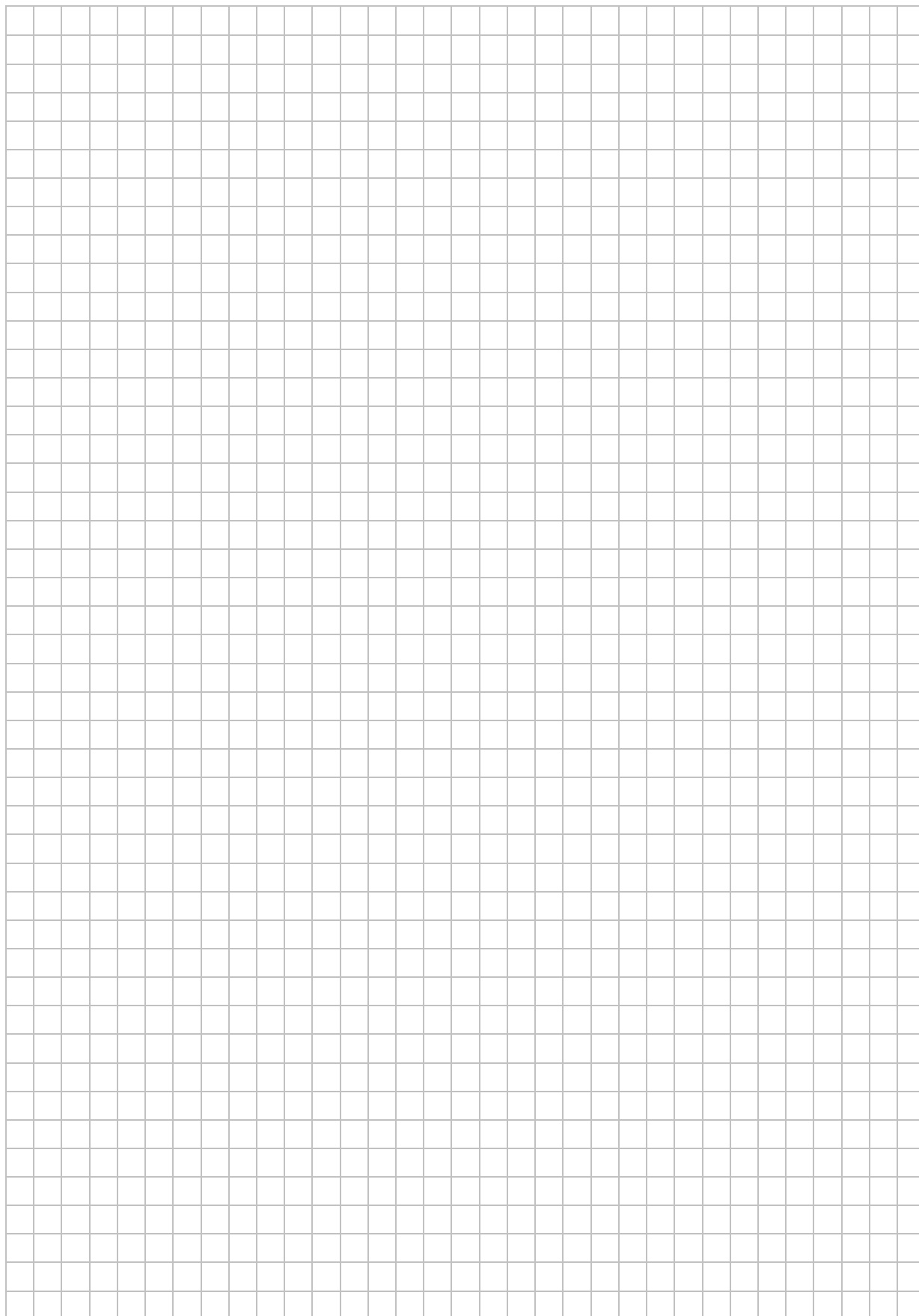
ZADANIE 11.1 (3 PKT)

Parabola będąca wykresem funkcji $y = f(x)$ przecina prostą $y = \log_{0,5} 384$ w punktach A i B . Wykaż, że suma kwadratów pierwszych współrzędnych punktów A i B jest równa $64 + \log_2 9$.



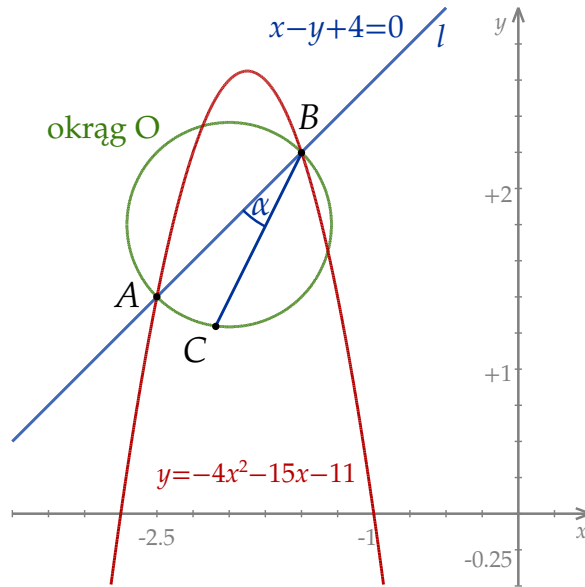
ZADANIE 11.2 (5 PKT)

Na paraboli $y = f(x)$ znajdź taki punkt P , który leży powyżej osi Ox , i dla którego stosunek jego pierwszej współrzędnej do drugiej jest najmniejszy możliwy.



ZADANIE 12 (6 PKT)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta l o równaniu $x - y + 4 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = -4x^2 - 15x - 11$ w punktach A oraz B . Odcinek AB jest średnicą okręgu O . Punkt C leży na okręgu O poniżej prostej l , a kąt ABC jest ostry i ma miarę α taką, że $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ (zobacz rysunek).



Oblicz współrzędne punktu C .

