Zadanie 1. (*4 pkt*)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\sin^2 x - 7\cos x - 5 = 0$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie

Przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna $2\left(1-\cos^2 x\right) - 7\cos x - 5 = 0$

$2 - 2\cos^2 x - 7\cos x - 5 = 0$

$2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0$

Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą, np. $t = \cos x$, gdzie $t \in \langle -1,1 \rangle$

Otrzymujemy równanie kwadratowe

$2t^2 + 7t + 3 = 0$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe

$\Delta = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 \quad \sqrt{\Delta} = 5$

$t_1 = \frac{-7-5}{4} = -3 \qquad t_2 = \frac{-7+5}{4} = -\frac{1}{2}$

Odrzucamy rozwiązanie $t_1 = -3$, ponieważ $-3 \notin \langle -1,1 \rangle$

Rozwiązujemy równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$

Zapisujemy rozwiązania równania w podanym przedziale

$x = \frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej, np.: $-2\cos^2 x - 7\cos x - 3 = 0$ lub $2\cos^2 x + 7\cos x + 3 = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wprowadzenie pomocniczej niewiadomej, np. $t = \cos x$, zapisanie równania w postaci $-2t^2 - 7 \cdot t - 3 = 0$ lub $2t^2 + 7 \cdot t + 3 = 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Rozwiązanie równania kwadratowego ($t = -\frac{1}{2}$ lub $t = -3$) i odrzucenie rozwiązania $t = -3$.

Uwaga:

Zdający może od razu rozwiązywać równanie kwadratowe (w którym niewiadomą jest $\cos x$) i zapisać rozwiązanie w postaci $\cos x = -\frac{1}{2}$ lub $\cos x = -3$ oraz zapisać, że równanie $\cos x = -3$ jest sprzeczne.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Rozwiązanie równania w podanym przedziale:
$x = \frac{2}{3}\pi$ lub $x = \frac{4}{3}\pi$
albo
$x = 120°$ lub $x = 240°$

Uwagi
1. Jeżeli zdający podstawia $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ bez żadnych założeń, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający podniesie obie strony równania $2\cos^2 x + 3 = -7\cos x$ do kwadratu i potem nie sprawdza rozwiązań, to otrzymuje **0 punktów**.
3. Nie wymagamy, aby zdający zapisał warunek np. $t \in \langle -1,1 \rangle$, o ile z dalszego ciągu rozwiązania wynika, że zdający uwzględnia go.
4. Jeżeli zdający rozwiąże poprawnie równanie kwadratowe i na tym zakończy, nie odrzucając rozwiązania $t = -3$, to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania kwadratowego i otrzyma dwa rozwiązania, z których co najmniej jedno należy do przedziału $\langle -1,1 \rangle$ i konsekwentnie rozwiąże oba równania w podanym przedziale, to otrzymuje **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązanie równania trygonometrycznego: $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 2. (*4 pkt*)
Rozwiąż nierówność $|2x + 2| + |x - 2| > 5$.

<u>I sposób rozwiązania</u>: wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, -1)$, $\langle -1, 2)$, $\langle 2, \infty)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności

$x \in (-\infty, -1)$	$x \in \langle -1, 2)$	$x \in \langle 2, \infty)$
$-2x - 2 - x + 2 > 5$ $-3x > 5$ $x < -\frac{5}{3}$	$2x + 2 - x + 2 > 5$ $x > 1$	$2x + 2 + x - 2 > 5$ $3x > 5$ $x > \frac{5}{3}$

Wyznaczamy część wspólną otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami

$x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right)$ $\qquad$ $x \in (1, 2)$ $\qquad$ $x \in \langle 2, \infty)$

i bierzemy sumę tych przedziałów: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

II sposób rozwiązania: zapisanie czterech przypadków

Zapisujemy cztery przypadki: $\begin{cases} 2x+2\geq 0 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2\geq 0 \\ x-2<0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2<0 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2<0 \\ x-2<0 \end{cases}$

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przypadkach:

$\begin{cases} 2x+2\geq 0 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq 2 \\ 2x+2+x-2>5 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq 2 \\ 3x>5 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -1 \\ x\geq 2 \\ x>\frac{5}{3} \end{cases}$ $x\in\langle 2,\infty)$	$\begin{cases} 2x+2\geq 0 \\ x-2<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -1 \\ x<2 \\ 2x+2-x+2>5 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -1 \\ x<2 \\ x>1 \end{cases}$ $x\in(1,2)$	$\begin{cases} 2x+2<0 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$ niemożliwe	$\begin{cases} 2x+2<0 \\ x-2<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1 \\ x<2 \\ -2x-2-x+2>5 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1 \\ x<2 \\ -3x>5 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1 \\ x<2 \\ x<-\frac{5}{3} \end{cases}$ $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)$

Podajemy odpowiedź: $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup(1,\infty)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

- zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty,-1)$, $\langle -1,2)$, $\langle 2,\infty)$

albo

- zapisze cztery przypadki: $\begin{cases} 2x+2\geq 0 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2\geq 0 \\ x-2<0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2<0 \\ x-2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2<0 \\ x-2<0 \end{cases}$.

Uwaga:
Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, ale nie są one konsekwencją błędu rachunkowego popełnionego przy przekształcaniu nierówności, to przyznajemy **0 punktów.** Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach np:

I. $x\in(-\infty,-1)$ $\quad -2x-2-x+2>5$

II. $x\in\langle -1,2)$ $\quad 2x+2-x+2>5$

III. $x\in\langle 2,\infty)$ $\quad 2x+2+x-2>5$

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Uwagi:
1. Jeżeli zdający rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający rozpatrzy cztery przypadki, rozwiąże nierówności w poszczególnych przedziałach, stwierdzi, że czwarty przypadek jest niemożliwy i na tym zakończy lub nie wyznaczy części wspólnej otrzymywanych wyników z poszczególnymi przedziałami i kontynuuje rozwiązanie, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt
- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo
- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach, stwierdzi, że czwarty jest niemożliwy, popełni błąd w trzecim przypadku i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup \left(1, \infty\right)$.

Uwaga:
1. We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte) to przyznajemy za całe zadanie o **1 pkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.
2. Jeżeli zdający przy przekształcaniu nierówności podanej w treści zadania popełni błąd (np. $\left|2\left(x+2\right)\right| + |x-2| > 5$), to otrzymuje **1 punkt mniej** niż przewidziany w schemacie w danej kategorii rozwiązania.

<u>III sposób rozwiązania</u>: graficznie 1

$|2x+2| + |x-2| > 5$.

Rysujemy wykres funkcji $f\left(x\right) = |2x+2| + |x-2|$ i prostą o równaniu $y = 5$

Wyróżniamy przedziały: $\left(-\infty, -1\right)$, $\left\langle -1, 2\right)$, $\left\langle 2, \infty\right)$.

Zapisujemy wzór funkcji w poszczególnych przedziałach, np.

I. $x \in \left(-\infty, -1\right)$ $\quad f\left(x\right) = -2x - 2 - x + 2$

II. $x \in \left\langle -1, 2\right)$ $\quad f\left(x\right) = 2x + 2 - x + 2$

III. $x \in \left\langle 2, \infty\right)$ $\quad f\left(x\right) = 2x + 2 + x - 2$

Przekształcamy wzór funkcji w poszczególnych przedziałach do postaci, np.

I. $x \in \left(-\infty, -1\right)$ $\quad f\left(x\right) = -3x$

II. $x \in \left\langle -1, 2\right)$ $\quad f\left(x\right) = x + 4$

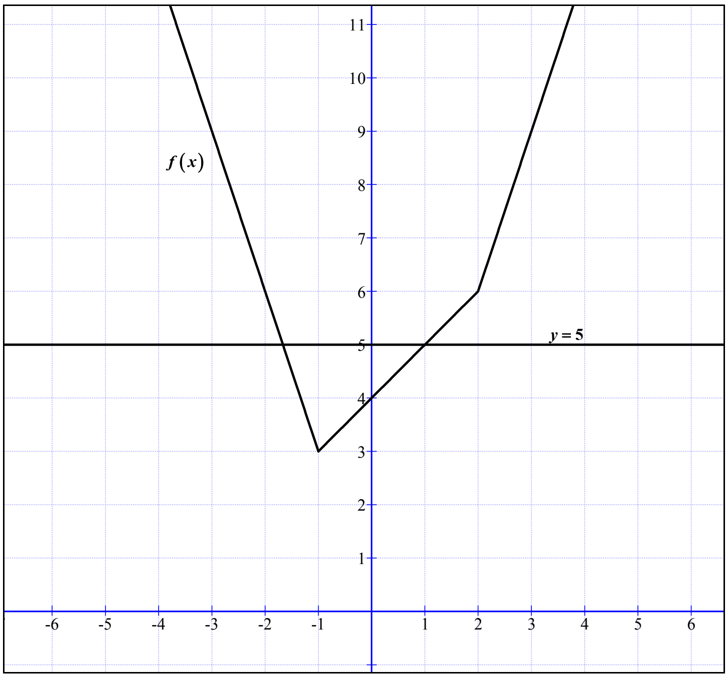
III. $x \in \left\langle 2, \infty\right)$ $\quad f\left(x\right) = 3x$

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Zapisujemy wzór funkcji, np.

$$f(x)=\begin{cases}-3x & \text{dla } x\in(-\infty,-1)\\ x+4 & \text{dla } x\in\langle -1,2)\\ 3x & \text{dla } x\in\langle 2,\infty)\end{cases}$$

Rysujemy wykres funkcji f i prostą o równaniu $y=5$.



Odczytujemy odcięte punktów przecięcia wykresu funkcji z prostą o równaniu $y=5$:

$x=-\frac{5}{3}, x=1$.

Zapisujemy argumenty, dla których $f(x)>5$: $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup(1,\infty)$.

__Schemat oceniania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały $(-\infty,-1)$, $\langle -1,2)$, $\langle 2,\infty)$.

__Uwaga:__
Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to przyznajemy **0 punktów** za całe zadanie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze wzór funkcji w poszczególnych przedziałach, np.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

I. $x \in (-\infty, -1)$ $\quad f(x) = -3x$

II. $x \in \langle -1, 2)$ $\quad f(x) = x + 4$

III. $x \in \langle 2, \infty)$ $\quad f(x) = 3x$

lub

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \\ x + 4 & \text{dla } x \in \langle -1, 2) \\ 3x & \text{dla } x \in \langle 2, \infty) \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający narysuje wykres funkcji f i prostą o równaniu $y = 5$.

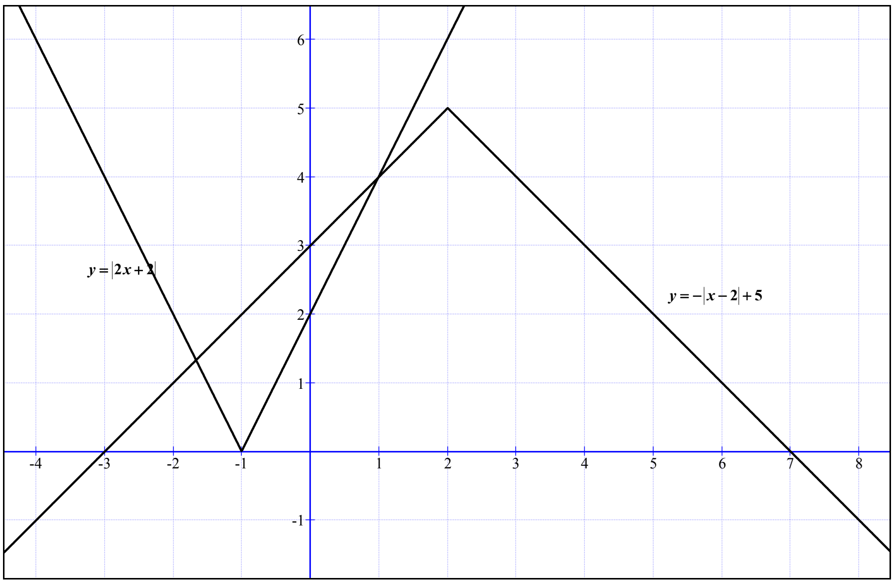
Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt
Zdający poda odpowiedź: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3} \right) \cup (1, \infty)$.

<u>Uwaga:</u>
We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać przedziały obustronnie domknięte. Jeżeli natomiast rozważy wszystkie przedziały otwarte, to przyznajemy za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

<u>IV sposób rozwiązania</u>: graficznie 2
Zapisujemy nierówność $|2x + 2| + |x - 2| > 5$ w postaci, np. $|2x + 2| > -|x - 2| + 5$.

Rysujemy wykresy funkcji: $y = |2x + 2|$, $\quad y = -|x - 2| + 5$.

Odczytujemy odcięte punktów przecięcia się wykresów funkcji: $x = -\frac{5}{3}$, $x = 1$.



Zapisujemy odpowiedź: $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3} \right) \cup (1, \infty)$.

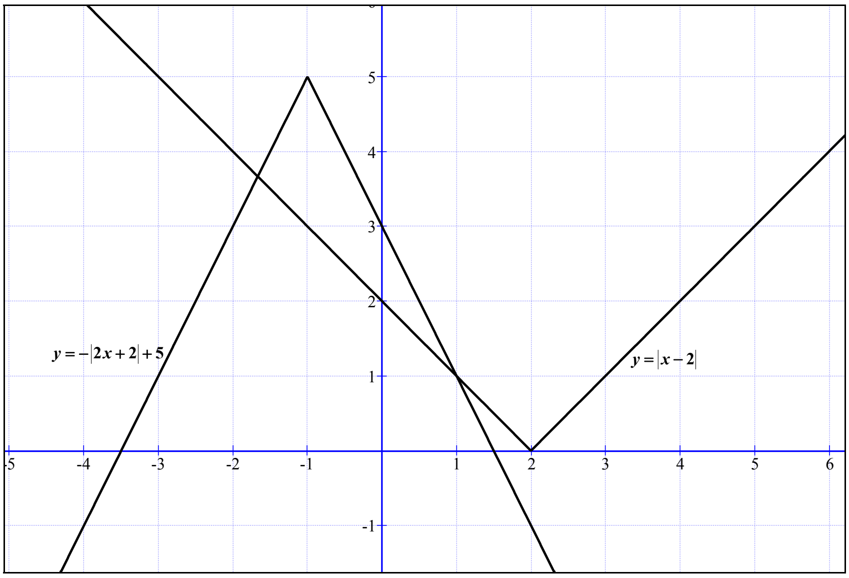
Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

V sposób rozwiązania: graficznie 3

Zapisujemy nierówność $|2x+2|+|x-2|>5$ w postaci, np. $|x-2|>-|2x+2|+5$.

Rysujemy wykresy funkcji: $y=|x-2|$, $y=-|2x+2|+5$.

Odczytujemy odcięte punktów przecięcia się wykresów funkcji: $x=-\frac{5}{3}$, $x=1$.



Zapisujemy odpowiedź: $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup(1,\infty)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający zapisze nierówność w postaci $|2x+2|>-|x-2|+5$ lub $|x-2|>-|2x+2|+5$ i narysuje wykres funkcji, np. $y=2x+2$ lub $y=x-2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający narysuje wykresy funkcji: $y=|2x+2|$ i $y=-|x-2|+5$

lub $y=|x-2|$ i $y=-|2x+2|+5$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt

Zdający narysuje poprawnie wykresy funkcji i błędnie wyznaczy odcięte jednego z punktów przecięcia się wykresów funkcji (np. $x=-2$ lub $x=1$) i konsekwentnie poda odpowiedź.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

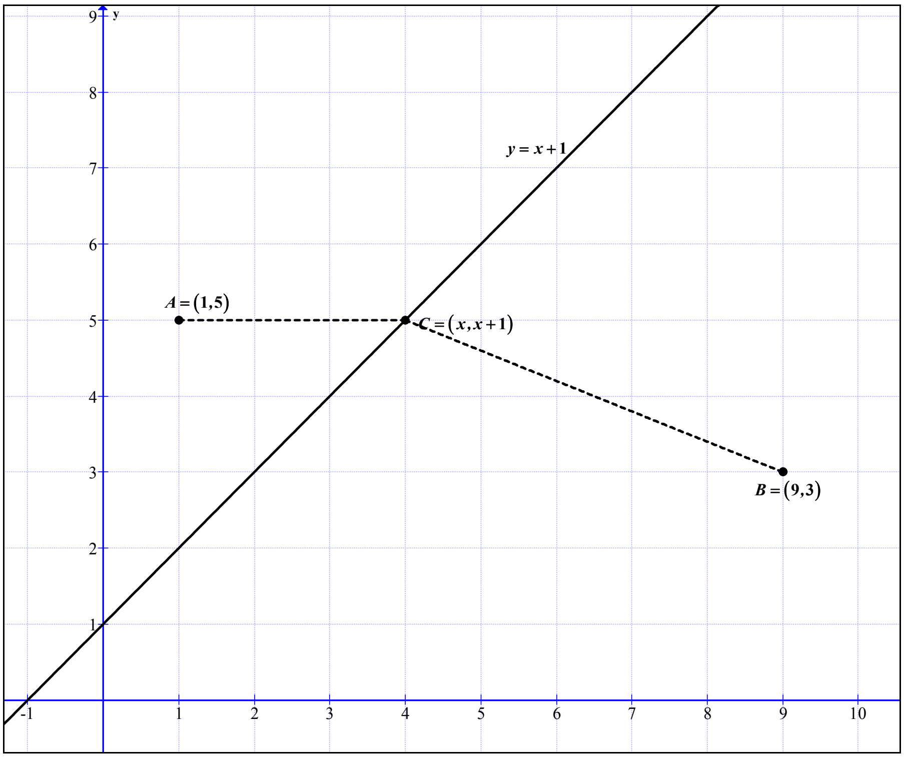
Zapisanie odpowiedzi: $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right)\cup(1,\infty)$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Zadanie 3. *(5 pkt)*

Dane są punkty $A=(1,5)$, $B=(9,3)$ i prosta k o równaniu $y=x+1$. Oblicz współrzędne punktu C leżącego na prostej k, dla którego suma $|AC|^2+|BC|^2$ jest najmniejsza.

Rozwiązanie



Punkt C leży na prostej k, więc ma współrzędne: $C=(x,x+1)$.
Wyznaczamy kwadraty odległości punktu C od punktów A i B:
$|AC|^2=(x-1)^2+(x-4)^2$, $|BC|^2=(x-9)^2+(x-2)^2$
Określamy wzór funkcji jednej zmiennej będącej sumą kwadratów odległości punktu C od punktów A i B:
$f(x)=(x-1)^2+(x-4)^2+(x-9)^2+(x-2)^2$,
po uporządkowaniu otrzymujemy: $f(x)=4x^2-32x+102$.
Wyznaczamy argument, dla którego wartość tej funkcji jest najmniejsza: $x=4$.
Obliczamy rzędną punktu C: $y=5$.
Odpowiedź: Współrzędne punktu $C=(4,5)$.

Schemat oceniania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Zapisanie współrzędnych punktu C leżącego na prostej k : $C=(x,x+1)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zapisanie zależności z jedną niewiadomą określającej kwadraty odległości punktu A od C lub odległości punktu B od C (lub odległości) :

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

$|AC|^2 = (x-1)^2 + (x-4)^2$ lub $|BC|^2 = (x-9)^2 + (x-2)^2$

(albo $|AC| = \sqrt{(x-1)^2 + (x-4)^2}$ lub $|BC| = \sqrt{(x-9)^2 + (x-2)^2}$).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Określenie wzoru funkcji jednej zmiennej będącej sumą kwadratów odległości punktu C od punktów A i B:

$f(x) = (x-1)^2 + (x-4)^2 + (x-9)^2 + (x-2)^2$ lub $f(x) = 4x^2 - 32x + 102$.

Uwagi:
Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu jednej z odległości $|AC|$ lub $|BC|$ i na tym poprzestanie, to otrzymuje 2 punkty.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Wyznaczenie współrzędnych punktu C: $C = (4,5)$.

Uwaga:
1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu jednej z odległości $|AC|$ lub $|BC|$ i rozwiązanie doprowadzi do końca, to otrzymuje 4 punkty.
2. Jeżeli zdający obliczy odciętą wierzchołka paraboli o równaniu $y = 4x^2 - 32x + 102$ tj. pierwszą współrzędną punktu C i na tym zakończy lub błędnie obliczy jego drugą współrzędną, to otrzymuje 4 punkty.

Zadanie 4. (5 *pkt*)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2 - (m-4)x + m^2 - 4m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, których suma jest mniejsza od $2m^3 - 3$.

Rozwiązanie
Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 < 2m^3 - 3 \end{cases}$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = -3m^2 + 8m + 16$ i rozwiązujemy nierówność

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\frac{4}{3}, 4\right)$$

Zapisujemy warunek $x_1 + x_2 < 2m^3 - 3$ w postaci nierówności z jedną niewiadomą:

$m - 4 < 2m^3 - 3$

$2m^3 - m + 1 > 0$

Doprowadzamy nierówność do postaci

$(m+1)(2m^2 - 2m + 1) > 0$

Otrzymujemy $m \in (-1, \infty)$.

Zatem $m \in (-1, 4)$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie zadania składa się z trzech części.

a) Pierwsza polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\frac{4}{3}, 4\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt.**

<u>Uwaga:</u>

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta \geq 0$, to **nie otrzymuje punktu** za tę część.

b) Druga polega na rozwiązaniu nierówności $x_1 + x_2 < 2m^3 - 3$, $m \in (-1, \infty)$. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

c) Trzecia polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z a) i b). Za poprawne rozwiązanie trzeciej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

W ramach drugiej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

- zapisanie nierówności $x_1 + x_2 < 2m^3 - 3$ w postaci równoważnej $m - 4 < 2m^3 - 3$

albo

- wykorzystanie wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego i zapisanie nierówności
$$\left(\frac{m-4-\sqrt{-3m^2+8m+16}}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-4+\sqrt{-3m^2+8m+16}}{2}\right)^2 < 2m^3 - 3.$$

Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania .... 2 pkt

Doprowadzenie nierówności do postaci $(m+1)(2m^2 - 2m + 1) > 0$ lub wyznaczenie pierwiastków wielomianu zapisanego po lewej stronie nierówności.

Rozwiązanie bezbłędne części b) .... 3 pkt

Rozwiązanie nierówności: $m \in (-1, \infty)$.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Wyznaczenie części wspólnej rozwiązań nierówności i zapisanie odpowiedzi $m \in (-1, 4)$.

<u>Uwaga</u>. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań obu nierówności, to otrzymuje **4 punkty**.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Zadanie 5. (*4 pkt*)

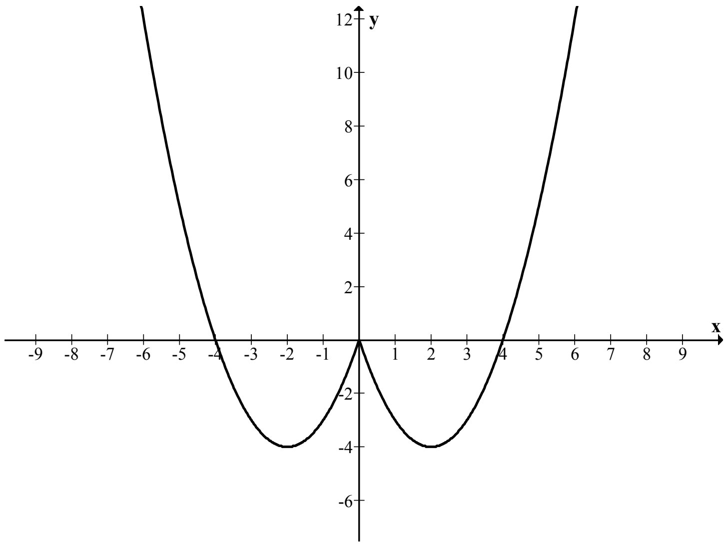
Narysuj wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=x^2-4|x|$ i na jego podstawie wyznacz liczbę rozwiązań równania $f(x)=m$ w zależności od wartości parametru m.

<u>Rozwiązanie</u>

Zapisujemy wzór funkcji *f* w postaci

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x & \text{dla } x\in\langle 0,\infty) \\ x^2+4x & \text{dla } x\in(-\infty,0) \end{cases}$$

Szkicujemy wykres otrzymanej funkcji *f*:



Z wykresu funkcji *f* odczytujemy liczbę rozwiązań równania $f(x)=m$:

$$\begin{cases} 0 & \text{dla } m\in(-\infty,-4) \\ 2 & \text{dla } m\in\{-4\}\cup(0,\infty) \\ 3 & \text{dla } m=0 \\ 4 & \text{dla } m\in(-4,0) \end{cases}$$

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

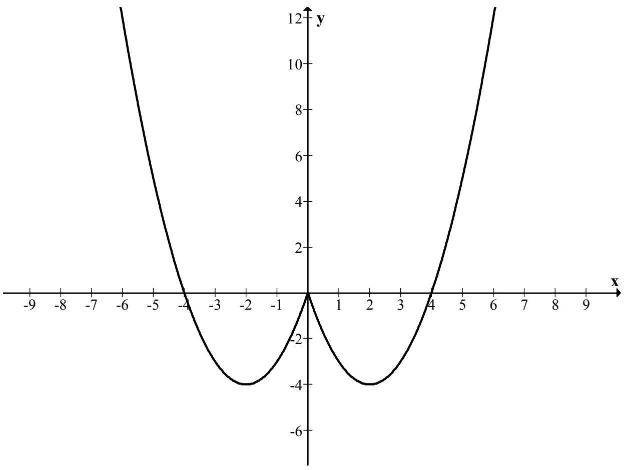
- zapisanie funkcji *f* na przykład w postaci: $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & \text{dla } x<0 \\ x^2-4x & \text{dla } x\geq 0 \end{cases}$

albo

- stwierdzenie, że wykres funkcji f jest symetryczny względem osi *Oy* lub stwierdzenie równoważne.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt
Narysowanie wykresu funkcji f.



Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania .... 3 pkt

- zdający popełni jeden błąd w ustalaniu liczby rozwiązań równania $f(x)=m$

albo

- zdający błędnie wyznaczy miejsca zerowe lub współrzędne wierzchołka paraboli, ale wykres funkcji ma trzy punkty wspólne z osią *Ox* i jest symetryczny względem osi *Oy* i konsekwentnie do popełnionego błędu poda liczbę rozwiązań równania.

Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt
Podanie liczby rozwiązań na przykład w postaci:

$$\begin{cases} 0 & \text{dla } m\in(-\infty,-4) \\ 2 & \text{dla } m\in\{-4\}\cup(0,\infty) \\ 3 & \text{dla } m=0 \\ 4 & \text{dla } m\in(-4,0) \end{cases}$$

Zadание 6. *(4 pkt)*

Wykaż, że nierówność $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b.

__Rozwiązanie__

Obie strony nierówności $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ podnosimy do czwartej potęgi, uzyskując równoważną nierówność postaci: $\frac{a^4+b^4}{2}\geq\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4}$, czyli $\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{4}\geq 0$. Stąd wnioskujemy, że dana w zadaniu nierówność jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych a i b.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Doprowadzenie nierówności do postaci $\frac{a^4+b^4}{2} \geq \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Doprowadzenie nierówności $\frac{a^4+b^4}{2} \geq \frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{4}$ do postaci, z której łatwo wywnioskować, że jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste a i b, np. $\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{4} \geq 0$.

Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt

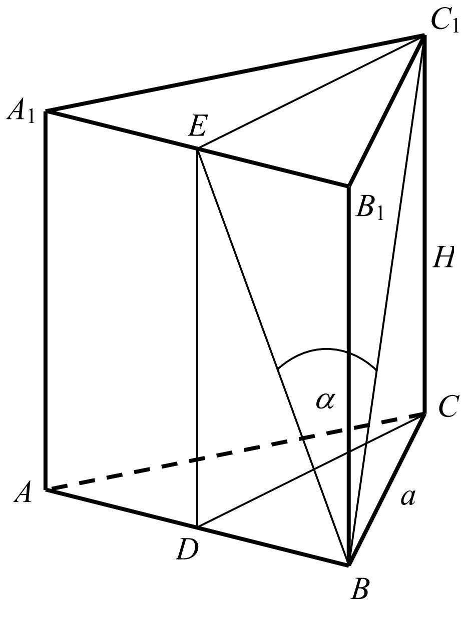
Uwaga:

Mogą być rozwiązania, w których zdający od razu napisze, że średnia potęgowa stopnia 4 jest niemniejsza od średniej kwadratowej (średniej potęgowej stopnia 2), bo im wyższy stopień, tym większa średnia. Należy wtedy przyznać 4 pkt.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Zadanie 7. *(5 pkt)*

Objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $12\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe 36. Oblicz sinus kąta, jaki tworzy przekątna ściany bocznej z sąsiednią ścianą boczną.



Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Objętość graniastosłupa jest równa

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H,$$

a pole powierzchni bocznej

$$P_b = 3a \cdot H$$

Stąd i z treści zadania otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} H = 12\sqrt{3} \\ 3aH = 36 \end{cases}$$

Jego rozwiązaniem jest

$$\begin{cases} a = 4 \\ H = 3 \end{cases}.$$

Obliczamy sinus kąta α nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej :

$\sin\alpha = \frac{|EC_1|}{|BC_1|}$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCC_1 mamy

$|BC_1| = \sqrt{a^2+H^2} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, a ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego $|EC_1| = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, więc $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie długości krawędzi graniastosłupa (*a*- krawędź podstawy, *H*- krawędź boczna):

$$\begin{cases} \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H = 12\sqrt{3} \\ 3aH = 36 \end{cases}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Rozwiązanie układu równań: $\begin{cases} a = 4 \\ H = 3 \end{cases}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

Zapisanie $\sin\alpha = \frac{|EC_1|}{|BC_1|}$ (lub zapisanie $\sin\alpha$ w innej równoważnej postaci np. $\sin\alpha = \frac{h}{d}$, *h* – wysokość trójkąta , *d* – przekątna ściany bocznej).

Rozwiązanie bezbłędne .... 5 pkt

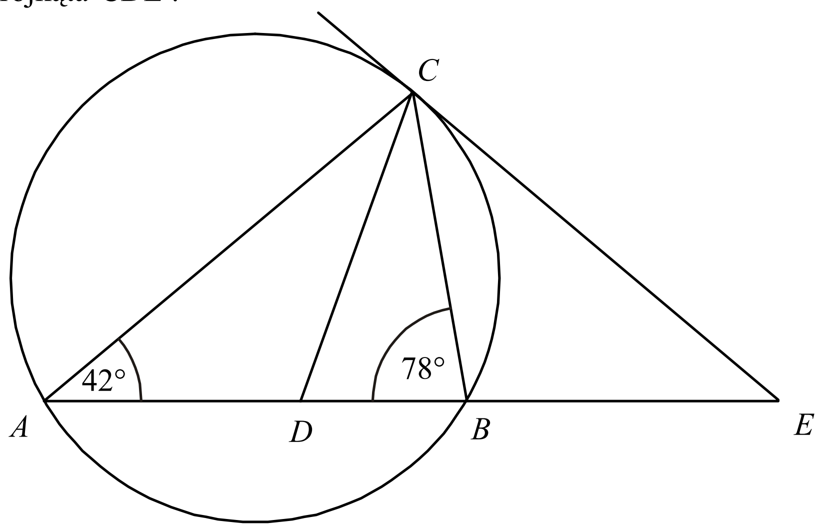
Obliczenie $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

Uwagi:

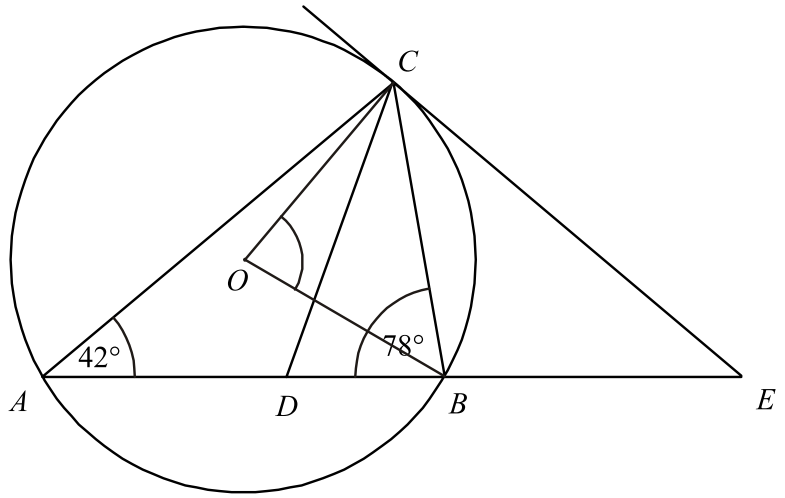
1. Jeżeli zdający narysuje graniastosłup i zaznaczy na nim kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej i na tym poprzestanie, to przyznajemy **1 punkt.**
2. Jeżeli zdający nie zapisze układu równań lub zapisze go błędnie, ale określi $\sin\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+H^2}}$ (lub zapisze $\sin\alpha$ w innej równoważnej postaci np. $\sin\alpha = \frac{h}{d}$, *h* – wysokość trójkąta , *d* – przekątna ściany bocznej) i na tym poprzestanie, to przyznajemy **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający rozwiąże układ równań bezbłędnie i narysuje graniastosłup z zaznaczonym na nim kątem nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej i na tym poprzestanie, to przyznajemy **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu układu równań i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to przyznajemy **4 punkty**.

Zadanie 8. (*4 pkt*)

Odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB trójkąta ABC. Kąty trójkąta ABC mają miary: $|\sphericalangle CAB| = 42°$, $|\sphericalangle ABC| = 78°$. Styczna do okręgu opisanego na tym trójkącie w punkcie C przecina prostą AB w punkcie E (zobacz rysunek). Oblicz, ile stopni ma każdy z kątów trójkąta CDE.



Rozwiązanie



$|\sphericalangle DCB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle ACB| = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 42^\circ - 78^\circ\right) = 30^\circ$

$|\sphericalangle CDE| = 180^\circ - \left(78^\circ + 30^\circ\right) = 72^\circ$

Kąt COB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt *CAB,* więc $|\sphericalangle COB| = 84^\circ$.

Trójkąt COB jest równoramienny stąd $|\sphericalangle OCB| = 48^\circ$.

$|\sphericalangle BCE| = 90^\circ - |\sphericalangle OCB| = 42^\circ$.

Do obliczenia miary tego kąta możemy też wykorzystać twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą.

$|\sphericalangle DCE| = |\sphericalangle DCB| + |\sphericalangle BCE| = 30^\circ + 42^\circ = 72^\circ$.

$|\sphericalangle CED| = 180^\circ - \left(|\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle DCE|\right) = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$.

Odpowiedź: Miary kątów trójkąta CDE to $|\sphericalangle CDE| = 72°$, $|\sphericalangle DCE| = 72°$, $|\sphericalangle CED| = 36°$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie miary kąta CDE: $|\sphericalangle CDE| = 72°$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie miar kątów COB i OCB, gdzie O jest środkiem okręgu

$|\sphericalangle COB| = 84°$, $|\sphericalangle OCB| = 48°$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie miary kąta BCE: $|\sphericalangle BCE| = 42°$.

Rozwiązanie bezbłędne .... 4 pkt

Obliczenie miar kątów trójkąta CDE: $|\sphericalangle CDE| = 72°$, $|\sphericalangle DCE| = 72°$, $|\sphericalangle CED| = 36°$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Zadanie 9. (*4 pkt*)

Liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ustawiamy losowo w szeregu. Oblicz prawdopodobieństwo, że w tym ustawieniu suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

<u>**I sposób rozwiązania**</u>

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie permutacje zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny, $|\Omega| = 8!$.

Zauważmy, że zdarzenie A - suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, zachodzi, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste.

Stąd $|A| = 2\cdot 4!\cdot 4!$ albo $|A| = 8\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ i $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{35}$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- zdający obliczy $|\Omega| = 8!$

albo

- zdający zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający obliczy $|\Omega| = 8!$ i zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający obliczy $|\Omega| = 8!$ i $|A| = 4!\cdot 4!\cdot 2$ albo $|A| = 8\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie bezbłędne . ... 4 pkt
Zdający obliczy prawdopodobieństwo i poda wynik w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego: $P(A)=\frac{1}{35}$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający zapisze $|A|=4!\cdot 4!$ i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo $P(A)=\frac{1}{70}$, to przyznajemy **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy albo nie poda wyniku w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego, to przyznajemy 3 punkty.

II sposób rozwiązania
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie podzbiory czteroelementowe zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (numery miejsc, na których stoją liczby parzyste (nieparzyste)). Zdarzenia jednoelementowe są równoprawdopodobne, mamy model klasyczny, $|\Omega|=\binom{8}{4}$.

Zauważmy, że zdarzenie A - suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, zachodzi, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste.
Stąd $|A|=2$ i $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1}{35}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania.. 1 pkt
- zdający zauważy, że aby rozwiązać zadanie, wystarczy znać numery miejsc, na których stoją liczby parzyste (nieparzyste) i obliczy $|\Omega|=\binom{8}{4}$

albo
- zdający zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający obliczy $|\Omega|=\binom{8}{4}$ i zauważy, że suma każdych dwóch sąsiednich liczb będzie nieparzysta, jeżeli w szeregu będą występowały na przemian liczby parzyste i nieparzyste i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zdający obliczy $|\Omega|=\binom{8}{4}$ i $|A|=2$ i na tym poprzestanie lub dalej rozwiązuje błędnie.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

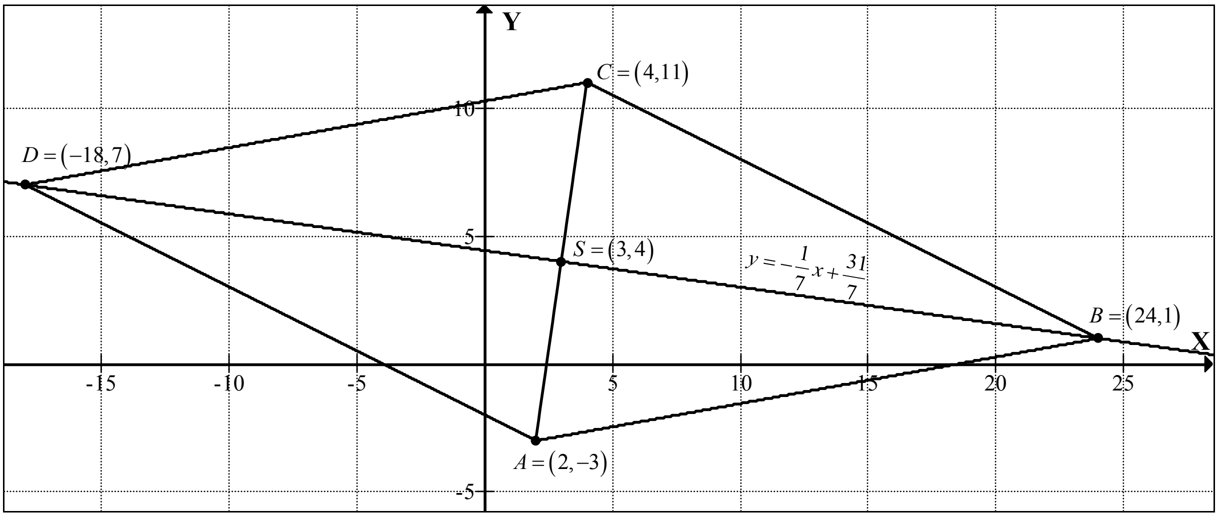
Rozwiązanie pełne .... **4 pkt**
Zdający obliczy prawdopodobieństwo i poda wynik w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego: $P(A)=\frac{1}{35}$.

Uwagi:
1. Jeżeli zdający zapisze $|A|=1$ i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo $P(A)=\frac{1}{70}$, to przyznajemy **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy lub nie poda wyniku w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego, to przyznajemy **3 punkty**.

Zadanie 10. (*6 pkt*)

Punkt $A=(2,-3)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu równym 300. Punkt $S=(3,4)$ jest środkiem symetrii tego rombu. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

I sposób rozwiązania (środek symetrii rombu)



Przekątne rombu są względem siebie prostopadłe i dzielą się na połowy. Znając współrzędne punktu *A* oraz środka symetrii rombu S obliczamy współrzędne punktu *C*.

$x_S=\frac{x_A+x_C}{2}$ $\qquad$ $y_S=\frac{y_A+y_C}{2}$

$x_C=2\cdot 3-2=4$ $\qquad$ $y_C=2\cdot 4-(-3)=11$

Punkt *C* ma współrzędne $(4,11)$.

Obliczamy długość przekątnej *AC*: $|AC|=10\sqrt{2}$.

Z wzoru na pole rombu obliczamy długość przekątnej *BD*.

$300=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}\cdot|BD|$ $\qquad$ $|BD|=30\sqrt{2}$.

Niech $B=(x,y)$, $|BS|=\frac{|BD|}{2}=15\sqrt{2}$ oraz $|BS|=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$. Punkt *B* leży na prostej o równaniu $x+7y=31$. Wyznaczam współrzędne punktów *B* i *D*:

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=\left(15\sqrt{2}\right)^2\\ x+7y=31\end{cases}$$

$$\begin{cases}(31-7y-3)^2+(y-4)^2=450\\ x=31-7y\end{cases}$$

$$(28-7y)^2+(y-4)^2=450$$

$$7^2(4-y)^2+(y-4)^2=450$$

$$49(y-4)^2+(y-4)^2=450$$

$$50(y-4)^2=450$$

$$(y-4)^2=9$$

$y-4=3$ lub $y-4=-3$

$\begin{cases}y=7\\ x=-18\end{cases}$ lub $\begin{cases}y=1\\ x=24\end{cases}$

lub

$$\begin{cases}(4-x)^2+(11-y)^2=\left(15\sqrt{2}\right)^2\\ y=-\frac{1}{7}x+\frac{31}{7}\end{cases}$$

$$(4-x)^2+\left(11+\frac{1}{7}x-\frac{31}{7}\right)^2=500$$

$$16-8x+x^2+\frac{1}{49}\left(x^2+92x+2116\right)=500$$

$$x^2-6x-432=0$$

$x=-18$ lub $x=24$

$\begin{cases}y=7\\ x=-18\end{cases}$ lub $\begin{cases}y=1\\ x=24\end{cases}$

Współrzędne pozostałych wierzchołków rombu: $B=(24,1)$, $D=(-18,7)$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie współrzędnych wierzchołka C oraz długości przekątnej AC (lub jej połowy): $C=(4,11)$, $|AC|=10\sqrt{2}$ $\left(|AS|=5\sqrt{2}\right)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktów B i D:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-4)^2=\left(15\sqrt{2}\right)^2\\ x+7y=31\end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

Przekształcenie układu do równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np. $(28-7y)^2+(y-4)^2=450$

Rozwiązanie pełne .... 6 pkt

Współrzędne pozostałych wierzchołków rombu: $B=(24,1)$, $C=(4,11)$, $D=(-18,7)$.

<u>Odpowiedź:</u> Współrzędne pozostałych wierzchołków rombu: $B=(24,1)$, $C=(4,11)$, $D=(-18,7)$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

<u>II sposób rozwiązania</u> (iloczyn skalarny)
Przekątne rombu są względem siebie prostopadłe i dzielą się na połowy. Znając współrzędne punktu A oraz środka symetrii rombu S obliczamy współrzędne punktu C.

$x_S = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_C}{2}$

$x_C = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \qquad y_C = 2 \cdot 4 - (-3) = 11$

Punkt C ma współrzędne $(4,11)$.

Obliczamy długość przekątnej AC: $|AC| = 10\sqrt{2}$.

Z wzoru na pole rombu obliczamy długość przekątnej BD.

$300 = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot |BD| \qquad |BD| = 30\sqrt{2}$

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy długość boku AD:

$|AD|^2 = |AS|^2 + |SD|^2 \qquad |AS| = \frac{1}{2}|AC|, \quad |SD| = \frac{1}{2}|BD|$

$|AD| = \sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 + \left(15\sqrt{2}\right)^2} = 10\sqrt{5}$

Wyznaczamy współrzędne punktów B i D rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} |AD|^2 = 500 \\ \overrightarrow{AS} \circ \overrightarrow{DS} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 500 \\ [1,7] \circ [3-x, 4-y] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 = 500 \\ 31 - x - 7y = 0 \end{cases}$$

$50y^2 - 400y + 350 = 0$

$y_1 = 7 \qquad y_2 = 1$

$$\begin{cases} x = -18 \\ y = 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 24 \\ y = 1 \end{cases}$$

<u>Odpowiedź:</u> Pozostałe wierzchołki rombu mają współrzędne: $B = (24,1)$, $C = (4,11)$ i $D = (-18,7)$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Obliczenie współrzędnych wierzchołka C oraz długości przekątnej AC (lub jej połowy): $C = (4,11)$ $|AC| = 10\sqrt{2}$ $\left(|AS| = 5\sqrt{2}\right)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Obliczenie długości drugiej przekątnej $|BD| = 30\sqrt{2}$ oraz długości boku rombu, np. $|AD| = 10\sqrt{5}$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt
Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć współrzędne punktu B (D) i przekształcenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą:

$$\begin{cases} |AD|^2 = 500 \\ \overrightarrow{SA} \circ \overrightarrow{SD} = 0 \end{cases}$$

$y^2 - 8y + 7 = 0$ lub $x^2 - 6x - 432 = 0$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 5 pkt

Rozwiązanie bezbłędne .... 6 pkt
Pozostałe wierzchołki rombu mają współrzędne: $B = (24,1)$, $C = (4,11)$ i $D = (-18,7)$.

Zadanie 11(*5 pkt*)

Ciąg (a,b,c) jest geometryczny i $a+b+c=26$, zaś ciąg $(a-5, b-4, c-11)$ jest arytmetyczny. Oblicz a, b, c.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Z własności ciągu geometrycznego zapisujemy równanie: $b^2 = a \cdot c$, a z własności ciągu arytmetycznego zapisujemy równanie: $2(b-4) = (a-5) + (c-11)$.

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} 2(b-4) = (a-5)+(c-11) \\ b^2 = a \cdot c \\ a+b+c = 26 \end{cases}$.

Przekształcamy układ równań do równania z jedną niewiadomą: $a^2 - 20a + 36 = 0$ lub $c^2 - 20c + 36 = 0$. Rozwiązujemy równanie i otrzymujemy: $a = 2$ lub $a = 18$ oraz $c = 2$ lub $c = 18$.
<u>Odp.</u> Warunki zadania spełniają liczby: $a = 2,\ b = 6,\ c = 18$ lub $a = 18,\ b = 6,\ c = 2$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Oznaczamy: przez a – pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, a przez q – iloraz tego ciągu. Wówczas $b = a \cdot q,\ c = a \cdot q^2$.
Z własności ciągu arytmetycznego i z warunków zadania zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + aq + aq^2 = 26 \\ 2(aq-4) = (a-5) + (aq^2 - 11) \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a(1+q+q^2) = 26 \\ aq^2 - 2aq + a - 8 = 0 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania mamy: $a = \dfrac{26}{1+q+q^2}$, zatem

$$\frac{26}{1+q+q^2} \cdot q^2 - \frac{2 \cdot 26}{1+q+q^2} \cdot q + \frac{26}{1+q+q^2} - 8 = 0.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy równanie: $3q^2 - 10q + 3 = 0$. Rozwiązaniem tego równania są liczby: $q = \dfrac{1}{3}, q = 3$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Dla każdej z tych liczb obliczamy a, b, c.

Warunki zadania spełniają liczby: $a = 2,\ b = 6,\ c = 18$ lub $a = 18,\ b = 6,\ c = 2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (arytmetycznego) i zapisanie odpowiedniego równania, np.

- $b^2 = a \cdot c$

albo

- $2(b-4) = (a-5) + (c-11)$

albo

- $2(aq-4) = (a-5) + (aq^2-11)$

albo

- $a + aq + aq^2 = 26$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Wykorzystanie własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisanie układu równań umożliwiającego obliczenie liczb *a*, *b*, *c*, np.

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ 2(b-4) = (a-5) + (c-11) \\ a + b + c = 26 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a + a \cdot q + a \cdot q^2 = 26 \\ 2(a \cdot q - 4) = (a-5) + (a \cdot q^2 - 11) \end{cases}$$

Uwaga:

Jeżeli zdający pomyli własności któregokolwiek ciągu, to za całe rozwiązanie otrzymuje 0 punktów.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Przekształcenie układu równań do równania z jedną niewiadomą, np.

$a^2 - 20a + 36 = 0$ lub $c^2 - 20c + 36 = 0$ lub $3q^2 - 10q + 3 = 0$

Uwaga:

Jeżeli w trakcie doprowadzania układu równań do równania kwadratowego zdający popełni błąd, w wyniku którego otrzyma równanie mające mniej niż dwa rozwiązania, to otrzymuje 2 punkty za całe zadanie.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego, odrzucenie jednego z rozwiązań (na przykład dla $q < 1$) i poprawne wyznaczenie drugiej trójki liczb

albo

- przekształcenie układu równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym (np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste)

Rozwiązanie bezbłędne .... 5 pkt

$a = 2,\ b = 6,\ c = 18$ lub $a = 18,\ b = 6,\ c = 2$.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info

Uwaga:
Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże układ równań i popełni błąd w zredagowaniu odpowiedzi, na przykład: $a=2$ lub $a=18$, $b=6$, $c=18$ lub $c=2$, to otrzymuje **4 punkty**.

Materiały pobrane z serwisu www.zadania.info