CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015

FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

CZERWIEC 2015

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odp.	B	B	C	C	C	D	C	A	B	A	B	C	A	A	B	D	B	A	C	D	D	D	D	C	A

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $7x^2 - 28 \le 0$.

<u>Rozwiązanie</u>

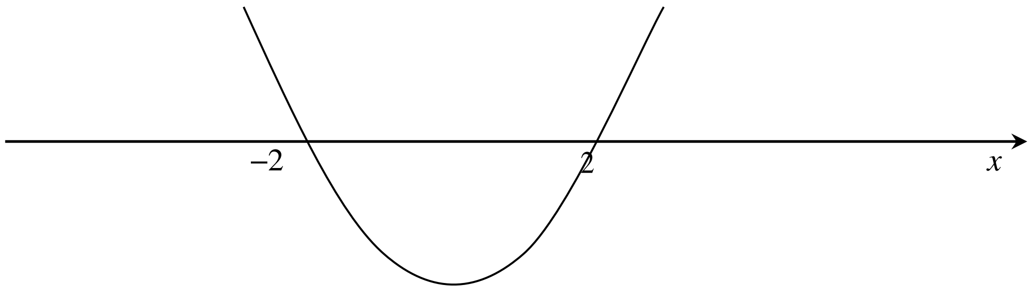
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap rozwiązania:
Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $7x^2 - 28$:

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie
  $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ lub $7(x+2)(x-2)$

albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu, a następnie stosujemy wzory na pierwiastki:
  $\Delta = 0 - 4 \cdot 7 \cdot (-28) = 28^2$, $x_1 = \frac{0-28}{14} = -2$, $x_2 = \frac{0+28}{14} = 2$.

Drugi etap rozwiązania:
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $-2 \le x \le 2$ lub $\langle -2, 2 \rangle$ lub $x \in \langle -2, 2 \rangle$ np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = 7x^2 - 28$.



<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - o rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $7(x+2)(x-2)$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

- obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
- zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 7x^2 - 28$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:

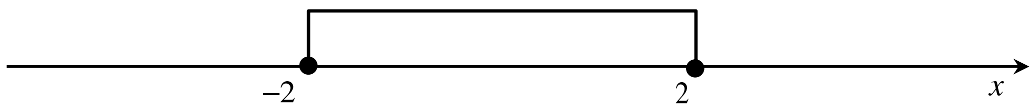
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $-2 \le x \le 2$ lub $\langle -2, 2\rangle$ lub $x \in \langle -2, 2\rangle$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $-2 \le x \le 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



<u>Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki</u>

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$ i zapisze, np. $x \in \langle 2,\ 2\rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \langle 2, -2\rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^4 - 2x^3 + 27x - 54 = 0$.

<u>Rozwiązanie</u> (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynu, stosując metodę grupowania wyrazów

$x^3(x-2) + 27(x-2) = 0$

$(x^3 + 27)(x-2) = 0$.

Stąd $x = -3$ lub $x = 2$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynu, np.: $(x^3+27)(x-2)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy wyznaczy bezbłędnie oba rozwiązania równania: $x=-3$, $x=2$.

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Funkcja kwadratowa f dla $x=-3$ przyjmuje wartość największą równą 4. Do wykresu funkcji f należy punkt $A=(-1,3)$. Zapisz wzór funkcji kwadratowej f.

I sposób rozwiązania

Wykorzystując fakt, że dla $x=-3$ funkcja kwadratowa f przyjmuje wartość największą równą 4, możemy zapisać: $f(x)=a\cdot(x+3)^2+4$.

Punkt $A=(-1,3)$ należy do wykresu funkcji, zatem możemy obliczyć wartość współczynnika *a*: $a\cdot(-1+3)^2+4=3$, stąd $a=-\frac{1}{4}$.

Zapisujemy wzór funkcji f w postaci $f(x)=-\frac{1}{4}\cdot(x+3)^2+4$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 p.

gdy

- Zapisze wzór funkcji, w którym nieznany jest tylko współczynnik stojący przy x^2, np. $f(x)=a\cdot(x+3)^2+4$,

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczeniu współczynnika a i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze wzór funkcji kwadratowej f.

Zdający otrzymuje ....2 p.

gdy zapisze wzór funkcji kwadratowej f : np. $f(x)=-\frac{1}{4}\cdot(x+3)^2+4$.

II sposób rozwiązania

Funkcja kwadratowa może być opisana wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$.

Wykorzystując fakt, że funkcja kwadratowa f przyjmuje wartość największą dla $x=-3$, możemy zapisać: $\frac{-b}{2a}=-3$.

Stąd $b = 6a$, czyli $f(x) = ax^2 + 6ax + c$.

Punkt $W = (-3, 4)$ należy do wykresu funkcji, zatem możemy zapisać: $4 = 9a - 18a + c$

Stąd $c = 9a + 4$, czyli $f(x) = ax^2 + 6ax + 9a + 4$.

Punkt $A = (-1, 3)$ należy do wykresu funkcji, zatem możemy obliczyć wartość współczynnika *a*: $a - 6a + 9a + 4 = 3$, stąd $a = -\frac{1}{4}$.

Wyznaczamy wartości *b* i *c*: $b = -\frac{6}{4}$, $c = \frac{7}{4}$

Zapisujemy wzór funkcji f: $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{4}x + \frac{7}{4}$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 p.

gdy

- Zapisze wzór funkcji, w którym nieznany jest tylko jeden współczynnik trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$, np. $f(x) = ax^2 + 6ax + 9a + 4$,

albo

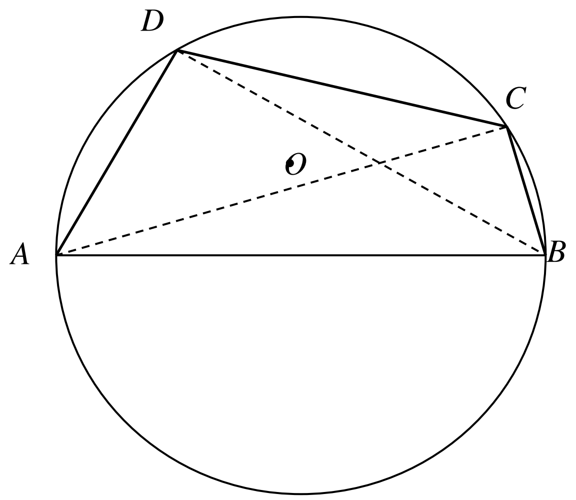
- popełni błędy rachunkowe przy obliczeniu współczynników *a*, *b*, *c* i konsekwentnie do popełnionych błędów zapisze wzór funkcji kwadratowej *f*.

Zdający otrzymuje ....2 p.

gdy zapisze wzór funkcji kwadratowej f : np. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{6}{4}x + \frac{7}{4}$.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Bok *AB* czworokąta *ABCD* wpisanego w okrąg jest średnicą tego okręgu (zobacz rysunek).
Udowodnij, że $|AD|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$.



<u>Dowód</u>

Kąt *ADB* jest prosty, jako kąt wpisany w okrąg oparty na jego średnicy.

Podobnie stwierdzamy, że kąt ACB jest prosty.
Z twierdzenia Pitagorasa dla tych trójkątów prostokątnych otrzymujemy

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 \text{ oraz } |AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 .$$

Porównując prawe strony tych równości otrzymujemy tezę. To kończy dowód.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy zauważy, że kąty ADB i ACB są proste, wykorzysta twierdzenie Pitagorasa i zapisze równości: $|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$, $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy uzasadni równość.

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

W siedmiowyrazowym ciągu arytmetycznym środkowy wyraz jest równy 0. Udowodnij, że suma wyrazów tego ciągu jest równa 0.

Rozwiązanie

Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, złożonym z siedmiu wyrazów. Zatem środkowym wyrazem tego ciągu jest $a_4 = a_1 + 3r = 0$. Suma wyrazów tego ciągu jest równa $S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$. Wykorzystując wzór na wyraz ogólny ciągu arytmetycznego lub wzór na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego, zapisujemy sumę ciągu w postaci

$S_7 = a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r + a_1 + 3r + a_1 + 4r + a_1 + 5r + a_1 + 6r = 7a_1 + 21r$

Ponieważ $a_1 + 3r = 0$, więc $a_1 = -3r$.

Stąd $S_7 = 7a_1 + 21r = 7\cdot(-3r) + 21r = -21r + 21r = 0$.

Zatem suma wyrazów tego ciągu jest równa 0.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy
- zapisze sumę wszystkich wyrazów ciągu w postaci $S_7 = 7a_1 + 21r$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo
- zapisze wszystkie wyrazy ciągu w zależności od wyrazu a_4, np. $a_1 = a_4 - 3r$, $a_2 = a_4 - 2r$, $a_3 = a_4 - r$, $a_5 = a_4 + r$, $a_6 = a_4 + 2r$, $a_7 = a_4 + 3r$, i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy uzasadni, że suma wyrazów ciągu jest równa 0.

Zadanie 31. ***(2 pkt)***

Ze zbioru cyfr $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ losujemy kolejno dwie cyfry (losowanie bez zwracania) i tworzymy liczby dwucyfrowe tak, że pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą dziesiątek, a druga – cyfrą jedności. Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia liczby podzielnej przez 4.

I sposób rozwiązania (*klasyczna definicja prawdopodobieństwa*)
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane (x,y), gdzie $x \neq y$, utworzone z dwóch cyfr wylosowanych ze zbioru $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, przy czym x oznacza cyfrę dziesiątek, y oznacza cyfrę jedności.
Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 8 \cdot 7 = 56$.
Niech A oznacza zdarzenie, że utworzona liczba jest podzielna przez 4.
Zatem
$$A = \{(1,2),(1,6),(2,4),(2,8),(3,2),(3,6),(4,8),(5,2),(5,6),(6,4),\ (6,8),(7,2),(7,6),(8,4)\}$$

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest więc równa
$|A| = 14$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A) = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$.

II sposób rozwiązania (metoda tabeli)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	**x**	☺				☺		
2		**x**		☺				☺
3		☺	**x**			☺		
4				**x**				☺
5		☺			**x**	☺		
6				☺		**x**		☺
7		☺				☺	**x**	
8				☺				**x**

Symbole w tabeli oznaczają odpowiednio:
x – zdarzenie niemożliwe
☺ – zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A
$|\Omega| = 8 \cdot 7 = 56$ i $|A| = 14$, zatem
$P(A) = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy
- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 8 \cdot 7 = 56$

albo
- obliczy (zaznaczy poprawnie w tabeli) liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 14$

Zdający otrzymuje ....2 pkt

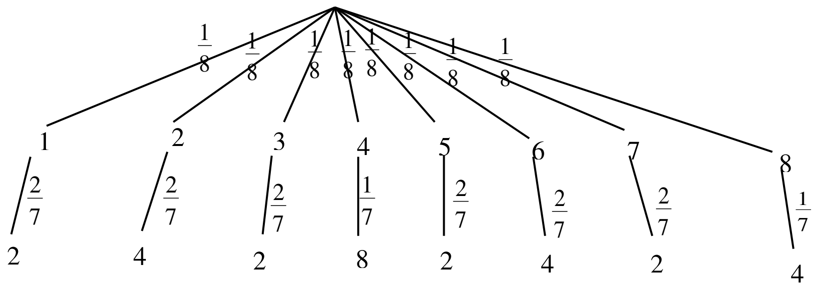
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P\left(A\right)=\frac{1}{4}$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełnił błąd przy zliczaniu w tabeli par, spełniających warunki zadania i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt**.

III sposób rozwiązania (*metoda drzewa*)

Drzewo:



Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* (liczba jest podzielna przez 4) jest więc równe:

$P\left(A\right)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{14}{56}=\frac{1}{4}$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy narysuje pełne drzewo i przynajmniej na jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwo

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P\left(A\right)=\frac{1}{4}$.

Uwagi

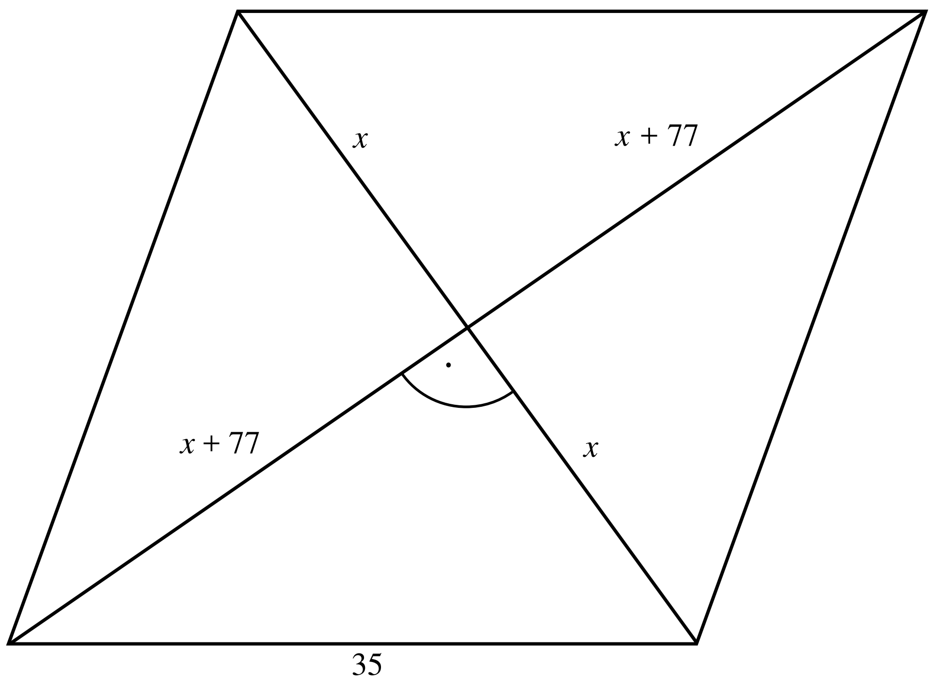
1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.
2. Jeśli zdający dodaje prawdopodobieństwa na gałęziach drzewa, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt** (pod warunkiem, że prawdopodobieństwa na gałęziach drzewa są zapisane prawidłowo).
3. Jeżeli zdający popełni błąd przy przepisywaniu prawdopodobieństw z gałęzi drzewa lub w zapisaniu prawdopodobieństwa na jednej gałęzi drzewa lub nie zaznaczy jednej istotnej gałęzi drzewa i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 32. ***(4 pkt)***

Dany jest romb o boku długości 35. Długości przekątnych tego rombu różnią się o 14. Oblicz pole tego rombu.

Rozwiązanie

Niech krótsza przekątna tego rombu ma długość $2x$ (zobacz rysunek). Wtedy druga przekątna ma długość równą $2x+14$.



Przekątne rombu przecinają się pod kątem prostym oraz dzielą się na połowy, zatem możemy zapisać równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa:

$$x^2+\left(x+7\right)^2=35^2.$$

Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie:

$$x^2+7x-588=0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania: $x=21$, $x=-28$. Odrzucamy ujemne rozwiązanie i zapisujemy długości przekątnych tego rombu: $2x=42$ oraz $2x+14=56$. Szukane pole rombu równa się więc:

$$P=\frac{1}{2}\cdot 42\cdot 56=1176.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający oznaczy długości przekątnych tego rombu i zapisze zależności między długościami tych przekątnych, np.

$$2x \text{ i } 2x+14$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zastosuje twierdzenie Pitagorasa i zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.

$$x^2+\left(x+7\right)^2=35^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze układ równań opisujący sytuację w zadaniu, np.

$$\begin{cases} p-q=7 \\ p^2+q^2=35^2 \end{cases}$$

gdzie p i q oznaczają długości połówek, odpowiednio, większej i mniejszej przekątnej tego rombu, to przyznajemy **2 punkty**.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający rozwiąże powyższe równanie, otrzymując dwa rozwiązania:

$$x=21,\ x=-28,$$

odrzuci ujemne rozwiązanie i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy pole tego rombu:

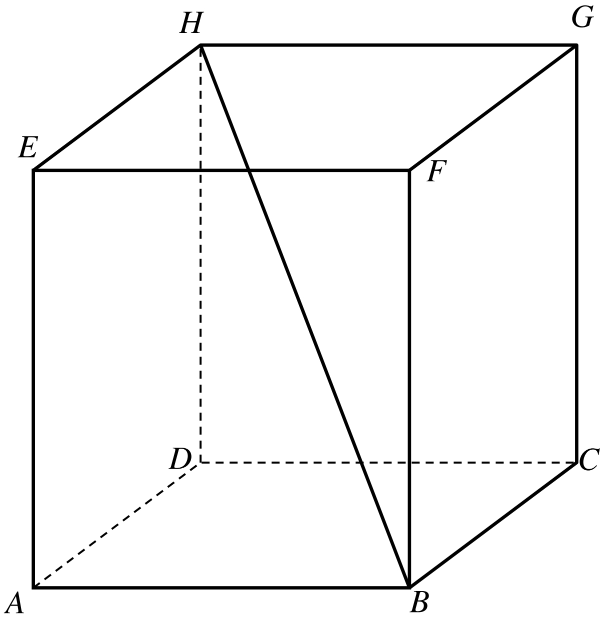
$$P=\frac{1}{2}\cdot 42\cdot 56=1176\ .$$

Uwaga

Jeżeli zdający odgadnie długości przekątnych rombu i sprawdzi, że wtedy bok rombu ma długość 35, to otrzymuje **1 punkt**. Jeżeli ponadto obliczy poprawnie pole tego rombu, to otrzymuje **2 punkty**.

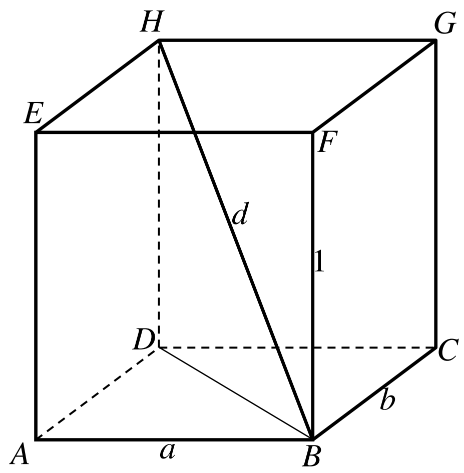
Zadanie 33. ***(4 pkt)***

Wysokość prostopadłościanu *ABCDEFGH* jest równa 1, a długość przekątnej *BH* jest równa sumie długości krawędzi *AB* i *BC*. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.



Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DBH* otrzymujemy

$$|BH|^2 = |BD|^2 + |DH|^2, \text{ czyli } d^2 = a^2 + b^2 + 1^2.$$

Stąd i z równości $d = a + b$ otrzymujemy

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 1,$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 1,$$

$$ab = \frac{1}{2}$$

Objętość *V* prostopadłościanu jest zatem równa $V = ab \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający

- zapisze długość przekątnej w zależności od długości boków podstawy: $d = a + b$

albo

- zapisze zależność między długością przekątnej prostopadłościanu i długościami jego krawędzi, np.: $d^2 = \left(a^2 + b^2\right) + 1^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze równanie pozwalające obliczyć pole podstawy prostopadłościanu:
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający obliczy pole podstawy prostopadłościanu: $ab = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Zdający obliczy objętość prostopadłościanu: $\frac{1}{2}$.

Uwaga

Jeżeli zdający rozwiąże zadanie jedynie w przypadku prostopadłościanu, którego podstawa *ABCD* jest kwadratem, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**, przy czym **1 punkt** otrzymuje za zapisanie równania $d^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + 1^2$, natomiast **2 punkty** otrzymuje za rozwiązanie zadania do końca w tym przypadku. Jeśli natomiast zauważy, że prostopadłościanów opisywanych w zadaniu jest nieskończenie wiele, więc wystarczy obliczyć objętość tylko w przypadku gdy $a = b$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

Zadanie 34. ***(5 pkt)***

Deweloper oferuje możliwość kompletnego wyposażenia kuchni i salonu w ofercie „Malejące raty”. Wysokość pierwszej raty ustalono na 775 zł. Każda następna rata jest o 10 zł mniejsza od poprzedniej. Całkowity koszt wyposażenia kuchni i salonu ustalono na 30 240 zł. Oblicz wysokość ostatniej raty i liczbę wszystkich rat.

Rozwiązanie

Kolejne raty tworzą ciąg arytmetyczny, w którym pierwszy wyraz $a_1 = 775$ i różnica $r = -10$. Jeżeli n oznacza liczbę rat, to suma wszystkich rat jest równa $S_n = 30240$. Wykorzystując wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, zapisujemy równanie

$$\frac{2 \cdot 775 + (n-1) \cdot (-10)}{2} \cdot n = 30240.$$

Przekształcamy to równanie równoważnie i otrzymujemy

$$(780 - 5n) \cdot n = 30240 \text{ i dalej}$$

$$n^2 - 156n + 6048 = 0.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania

$$n_1 = 72 \text{ i } n_2 = 84.$$

Obliczamy teraz wysokość ostatniej raty, czyli $a_{72} = 65$ i $a_{84} = -55$.

Drugie rozwiązanie odrzucamy, jako sprzeczne z warunkami zadania, a całkowity koszt wyposażenia kuchni i salonu zostanie spłacony w 72 ratach.

Odpowiedź: Liczba rat to 72. Ostatnia rata wyniosła 65 zł.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Zdający zauważy, że problem daje się opisać za pomocą ciągu arytmetycznego, w którym pierwszym wyrazem jest 775, a różnicą tego ciągu jest -10.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zdający zapisze równania z niewiadomą n: np. $\frac{2\cdot 775+(n-1)\cdot(-10)}{2}\cdot n = 30240$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą n i otrzymanie dwóch rozwiązań $n_1 = 72$ i $n_2 = 84$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. drobne błędy rachunkowe lub wadliwe przepisanie) .... 4 pkt
- rozwiązanie równania z niewiadomą n z błędem rachunkowym (o ile przynajmniej jedno rozwiązanie jest liczbą naturalną) i konsekwentne do popełnionego błędu obliczenie wysokość ostatniej raty

albo
- rozwiązanie równania kwadratowego i odrzucenie jednego rozwiązania i brak obliczenia lub obliczenie błędnie wysokości ostatniej raty.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt
Wyznaczenie liczby rat: 72
i wysokości ostatniej raty: 65 zł.