Wpisuje zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

Miejsce na nalepkę
z kodem szkoły

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

CKA – kurs przygotowujący
28 kwietnia 2005

CENTRUM KSZTAŁCENIA AKADEMICKIEGO

Arkusz I
Poziom podstawowy

Czas pracy 120 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Proszę sprawdzić, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 11 stron. Ewentualny brak należy zgłosić przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania i odpowiedzi należy zapisać czytelnie w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. Proszę pisać tylko w kolorze czarnym; nie pisać ołówkiem.
4. W rozwiązaniach zadań trzeba przedstawić tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Nie wolno używać korektora.
6. Błędne zapisy trzeba wyraźnie przekreślić.
7. Brudnopis nie będzie oceniany.
8. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.`
9. Podczas egzaminu można korzystać z udostępnionego zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora. Nie można korzystać z kalkulatora graficznego.

Życzymy powodzenia!

Wpisuje egzaminator / nauczyciel sprawdzający pracę

Nr. zadania	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**SUMA**
Maksymalna liczba punktów	4	6	5	4	6	3	5	6	6	5	50
Uzyskana liczba punktów											

Uwaga!

Tylko na naszych stronach internetowych:

www.zadania.pl
www.cka.pl
www.rozwiazania.pl

w dniu matury z matematyki tradycyjnie zamieścimy PEŁNE rozwiązania zadań maturalnych.

Serdecznie Zapraszamy.

CKA

ZADANIE 1. ***(4 punkty)*** Uprościć wyrażenie: $A=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że

$$2\pm\sqrt{3}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2\pm2\sqrt{3}+1}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}\pm1\right)^2}{2}.$$

Korzystając z otrzymanej tożsamości mamy:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}\cdot2}$$

Postępując analogicznie przekształcamy wyrażenie $\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$:

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{3}}.$$

Zatem

$$A=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{2}.$$

ZADANIE 2. ***(3 punkty)*** Po podwójnym spadku najpierw o 20%, a następnie o 10%, zysk pewnej spółki wynosi 36000PLN. Jaki był zysk tej spółki przed pierwszym spadkiem?

ROZWIĄZANIE

Niech K_0 oznacza pierwotny zysk spółki. Wówczas

$K_0\left(1-\dfrac{20}{100}\right)$ - zysk spółki po pierwszym spadku,

$K_0\left(1-\dfrac{20}{100}\right)\left(1-\dfrac{10}{100}\right)$ - zysk spółki po drugim spadku,

wobec tego:

$$K_0\left(1-\frac{20}{100}\right)\left(1-\frac{10}{100}\right)=36000,$$

stąd kolejno:

$$K_0 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} = 36000, \qquad \frac{K_0}{50} = 1000, \qquad K_0 = 50000.$$

Odp. Zysk spółki przed pierwszym spadkiem wynosił 50000 PLN.

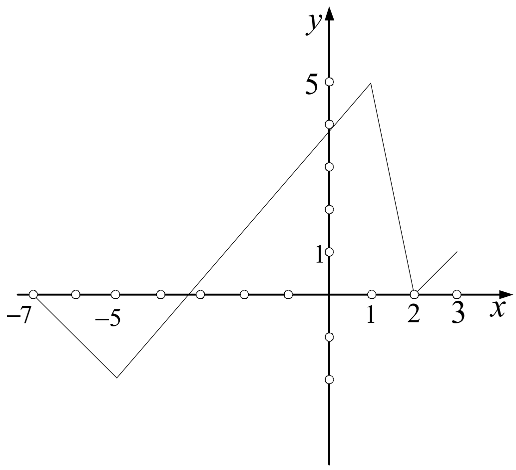
ZADANIE 3. ***(6 punktów)*** Z przedstawionego obok wykresu funkcji $f : \langle -7, 3 \rangle \to \mathbb{R}$ odczytaj:

a) Dla jakich x funkcja f jest malejąca, a dla jakich rosnąca.

b) Podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji *f*.

c) Odczytaj z wykresu funkcji f największą i najmniejszą wartość

tej funkcji w przedziale $\langle -7, 3 \rangle$.



ROZWIĄZANIE

Dla $x \in (-7, -5)$ - funkcja maleje.

Dla $x \in (-5, 1)$ - funkcja rośnie.

Dla $x \in (1, 2)$ - funkcja maleje.

Dla $x \in (2, 3)$ - funkcja rośnie.

b) Dziedziną funkcji są wszystkie $x \in \langle -7, 3 \rangle$, zbiorem wartości są wszystkie $y \in \langle -2, 5 \rangle$.

c) $\min\limits_{-7 \le x \le 3} f(x) = f(-5) = -2$, $\qquad \max\limits_{-7 \le x \le 3} f(x) = f(1) = 5$.

ZADANIE 4. ***(4 punkty)*** Jeżeli dane są wielomiany $P(x)=x^4+2x^3-x+5$, $Q(x)=x^2+3x-2$, to wielomiany $A(x)$ i $B(x)$ spełniające równanie: $P(x)=A(x)Q(x)+B(x)$ dla $x\in\mathbb{R}$, można wyznaczyć stosując algorytm dzielenia wielomianów:

Wykonujemy dzielenie:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4+2x^3-x+5\right):\left(x^2+3x-2\right)=x^2-x+5 \\
\underline{-x^4-3x^3+2x^2} \\
\qquad -x^3+2x^2-x+5 \\
\underline{\qquad\ \ x^3+3x^2-2x} \\
\qquad\qquad 5x^2-3x+5 \\
\underline{\qquad\quad -5x^2-15x+10} \\
\qquad\qquad\quad -18x+15
\end{array}
$$

Stąd otrzymujemy: $x^4+2x^3-x+5=\underbrace{\left(x^2-x+5\right)}_{A(x)}\left(x^2+3x-2\right)+\underbrace{\left(-18x+15\right)}_{B(x)}$.

Zatem: $A=1,\quad B=-1,\quad C=5,\quad D=-18,\quad E=15$.

Postępując analogicznie, znajdź wielomiany A i B spełniające równość:

$P(x)=A(x)Q(x)+B(x)$ dla $x\in\mathbb{R}$, gdzie:

$P(x)=2x^4+x^3-x+1$, oraz $Q(x)=2x^2+2x-1$.

ROZWIĄZANIE

Wykonujemy dzielenie:

$$
\begin{array}{l}
\left(2x^4+x^3-x+1\right):\left(2x^2+2x-1\right)=x^2-\frac{1}{2}x+1 \\
\underline{-2x^4-2x^3+x^2} \\
\qquad -x^3+x^2-x+1 \\
\underline{\qquad\ \ x^3+x^2-\frac{1}{2}x} \\
\qquad\qquad 2x^2-\frac{3}{2}x+1 \\
\underline{\qquad\quad -2x^2-2x+1} \\
\qquad\qquad\quad -\frac{7}{2}x+2
\end{array}
$$

Stąd otrzymujemy:

$$2x^4+x^3-x+1=\underbrace{\left(x^2-\frac{1}{2}x+1\right)}_{A(x)}\left(2x^2+2x-1\right)+\underbrace{\left(-\frac{7}{2}x+2\right)}_{B(x)}.$$

Zatem: $A=1, \quad B=-\frac{1}{2}, \quad C=1, \quad D=-\frac{7}{2}, \quad E=2$.

ZADANIE 5. ***(3 punkty)*** Dla jakich wartości parametru m równanie $\cos x=m+1$ ma rozwiązanie.

ROZWIĄZANIE

Równanie trygonometryczne $\cos x=a$ ma rozwiązanie, gdy $-1\le a\le 1$, otrzymujemy: $-1\le m+1\le 1$. Dodając -1 do stron nierówności, mamy: $-2\le m\le 0$. Mamy, więc: $m\in\left\langle -2, 0\right\rangle$.

ZADANIE 6 ***(7 punktów).*** Droga łącząca domy Michała i Bartka ma długość 6,5 km. Koledzy umówili się telefonicznie na spotkanie i o ustalonej godzinie jednocześnie wyruszyli z domów. Michał, jadąc na rowerze, w pierwszej minucie pokonał 300 m, a w każdej następnej przejeżdżał o 30 m więcej niż w poprzedniej. Bartek, idąc pieszo, w pierwszej minucie przeszedł 120 m, a w każdej następnej minucie pokonywał o 5 m mniej niż w poprzedniej. Ułóż odpowiednie równanie lub nierówność i oblicz, w której minucie od chwili wyjścia z domów spotkają się koledzy.

ROZWIĄZANIE

Michał jadąc na rowerze przebywa w kolejnych minutach drogę będącą ciągiem arytmetycznym (a_n), gdzie $a_1=300, \quad r=30$ zatem po n minutach przebędzie drogę

$$S_n^{(M)}=\frac{\left[600+(n-1)\cdot 30\right]n}{2}=285n+15n^2.$$

Bartek idąc pieszo przebywa w kolejnych minutach drogę będącą ciągiem arytmetycznym (b_n), gdzie $b_1=120, \quad r=-5$, zatem po n minutach przebył drogę

$$S_n^{(B)}=\frac{\left[240+(n-1)\cdot(-5)\right]n}{2}=\frac{245n-5n^2}{2}.$$

Ponieważ przebyte przez nich drogi mają w momencie spotkania $6,5$ km, czyli

$$S_n^{(M)}+S_n^{(B)}=6500,$$

więc otrzymujemy równanie kwadratowe

$285n+15n^2+\frac{245n-5n^2}{2}=6500$,

które rozwiązujemy:

$570n+30n^2+245n-5n^2=13000$,

$25n^2+815n-13000=0 \quad /:5$,

$5n^2+163n-2600=0$,

$\Delta=163^2+20\cdot 2600=78569$.

Pierwiastek z delty nie jest liczbą całkowitą gdyż:

$280^2=78400<78569<281^2=78961$

$280<\sqrt{\Delta}<281$.

Stąd $n_1\approx\frac{-163-280}{10}<0$, $\qquad n_2\approx\frac{-163+280}{10}\approx 11,7$.

Odp. Koledzy spotkają się w 12 minucie od wyruszenia z domów.

ZADANIE 7*(3 punkty)* Lewa strona równania $1+x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{2n}+\ldots=3$ jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie x^2. Z warunku zbieżności mamy $x^2<1$. Zatem dziedziną jest przedział $(-1,1)$. Równanie można zapisać w postaci $1+x^2\left(1+x^2+x^4+\ldots\right)=3$ stąd $1+3x^2=3$. Pierwiastkami ostatniego równania są liczby $x_1=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Postępując w analogiczny sposób rozwiąż równanie $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=2$.

ROZWIĄZANIE

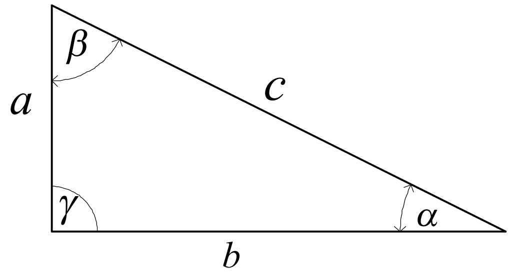
Lewa strona równania $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots=2$ jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie x. Z warunku zbieżności $|x|<1$. Zatem dziedziną jest przedział $(-1,1)$. Równanie możemy zapisać w postaci:

$1+x\left(1+x+x^2+\ldots\right)=2$, stąd

$1+2x=2$, $\qquad 2x=1$, $\qquad x=\frac{1}{2}$.

ZADANIE 8. ***(4 punkty)*** Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się 2.

ROZWIĄZANIE



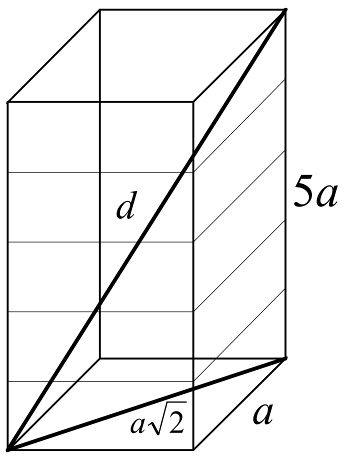
Korzystając z oznaczeń jak na rysunku mamy związki w twierdzeniu Pitagorasa:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \sin^2\frac{\pi}{2} =$$

$$= \frac{a^2+b^2}{c^2} + 1 = \frac{c^2}{c^2} + 1 = 1 + 1 = 2.$$

ZADANIE 9. ***(5 punkty)*** Pięć przystających sześcianów ustawiono jeden na drugim tworząc prostopadłościan, którego przekątna ma długość $6\sqrt{3}$. Oblicz długość krawędzi sześcianu.

ROZWIĄZANIE



Z twierdzenia Pitagorasa mamy $d^2 = (5a)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2$,

$d^2 = 27a^2$, stąd $d = 3\sqrt{3}a$, czyli $3a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$, stąd $a = 2$.

Odp. Krawędź sześcianu jest równa 2.

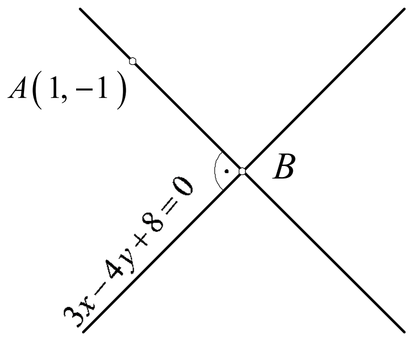
ZADANIE 10. ***(4 punktów)*** Znaleźć rzut prostokątny punktu $A(\ 1,\ -1\ )$ na prostą $3x - 4y + 8 = 0$.

ROZWIĄZANIE

Rzut prostokątny punktu na prostą jest punktem przecięcia się tej prostej z prostą do niej prostopadłą przechodzącą przez dany punkt.

Dana jest prosta w postaci kierunkowej $y = \frac{3}{4}x + 2$. Prosta do niej prostopadła ma współczynnik kierunkowy $a = -\frac{4}{3}$ - na podstawie warunku prostopadłości, więc mamy jej równanie:

$$y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 1), \quad 3y + 3 = -4x + 4, \quad 4x + 3y - 1 = 0.$$



Wyznaczamy rzut B punktu A, jako przecięcia się prostych:

$\begin{cases} 3x-4y+8=0, \\ 4x+3y-1=0, \end{cases}$ mnożąc pierwsze równanie przez 3, zaś drugie przez 4 i dodając stronami, otrzymujemy:

$25x+20=0$, skąd $x=-\frac{4}{5}$.

Obliczamy y:

$-\frac{12}{5}+8=4y$, skąd $y=\frac{7}{5}$.

Odp. Szukany punkt ma współrzędne $B\left(-\frac{4}{5},\frac{7}{5}\right)$.

ZADANIE 11. ***(7 punktów)*** Dyrektor pewnego banku przeznaczył na pomieszczenia biurowe dla swoich pracowników 40 pokoi ponumerowanych kolejno od 101 do 140. Poniżej, zestawiono jaki procent liczby pokoi stanowią pokoje jedno, dwu, trzy i czteroosobowe:

liczba pracowników w pokoju	1	2	3	4
liczba pokoi	40%	25%	20%	15%

Dyrektor wylosuje numery trzech pokoi, w których zostaną zainstalowane kamery przemysłowe. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia:

A – kontrolą objętych zostanie 10 pracowników.

ROZWIĄZANIE

Mamy liczbę pokoi 1, 2, 3 i 4 osobowych:

$40\cdot\frac{40}{100}=16$ pokoi jedno osobowych

$40\cdot\frac{25}{100}=10$ pokoi dwu osobowych

$40\cdot\frac{20}{100}=8$ pokoi trzy osobowych

$40\cdot\frac{15}{100}=6$ pokoi cztero osobowych.

liczba pracowników w pokoju	1	2	3	4
liczba pokoi	16	10	8	6

Wszystkich wyników losowania 3 pokoi z 40 jest

$$\overline{\overline{\Omega}}=\binom{40}{3}=\frac{38\cdot39\cdot40}{1\cdot2\cdot3}=\frac{59280}{6}=9880.$$

Niech A zdarzenie polegające na tym, że kontrolą zostanie objętych 10 pracowników. Przedstawiamy rozkład liczby 10 na trzy składniki /każdy z nich jest jedną z liczb 1, 2, 3, 4/.

$10 = 4+4+2 = 4+3+3$

Korzystając ze schematu losowania bez zwracania mamy:

$$\begin{array}{rcccccccc} & \text{1 osobowe} & & \text{2 osobowe} & & \text{3 osobowe} & & \text{4 osobowe} \\ 40 = & 16 & + & 10 & + & 8 & + & 6 \\ 3 = & 0 & + & 1 & + & 0 & + & 2 \end{array}$$

lub

$$\begin{array}{rcccccccc} 3 = & 0 & + & 0 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Zatem

$$P(A) = \frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{6}{2}+\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{40}{3}} = \frac{10\cdot\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}+\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot 6}{\frac{40\cdot 39\cdot 38}{1\cdot 2\cdot 3}} = \frac{10\cdot\frac{30}{2}+\frac{336}{2}}{9880} = \frac{318}{9880} = \frac{159}{4940}.$$

Zadania pochodzą z książek naszego wydawnictwa

1. Matematyka nowa matura - zagadnienia teoretyczne wraz z przykładami cz. I.
2. Matematyka nowa matura - 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzem cz.II

„Matematyka – nowa matura - zagadnienia teoretyczne wraz z przykładami cz.1” jest książką przeznaczoną dla uczniów przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym. Zawiera opracowanie zagadnień teoretycznych zgodnych z wymaganiami programu nauczania. Zawarty materiał przedstawiony jest sposób zwięzły, zobrazowany licznymi przykładami. Książka obejmuje wszystkie zagadnienia obowiązujące na egzaminie maturalnym z matematyki tj.

podstawowe działania (procenty, średnie, wykresy i diagramy), funkcja liniowa i kwadratowa, wielomiany, równania i nierówności algebraiczne, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna, funkcje trygonometryczne, funkcje cyklometryczne, indukcja matematyczna, dwumian Newtona, ciągi liczbowe, funkcja i rachunek różniczkowy, planimetria, stereometria, geometria analityczna, kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa i zmienna losowa oraz elementy statystyki.

Doskonałym uzupełnieniem tej pozycji jest książka naszego wydawnictwa *„Matematyka – nowa matura – 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami”.*

Wydawnictwo: Centrum Kształcenia Akademickiego CKA
Wydanie: pierwsze styczeń 2005
Format: A5
Ilość stron: 237
Cena detaliczna: 35,- PLN
ISBN: 83-918391-3-3

ISBN 839183913-3
9788391839133

„Matematyka – nowa matura - 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami cz.II” . Książka zawiera 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami. Jest to jedyna taka publikacja na rynku, zawierająca tak ogromną bazę zadań przeznaczoną do przygotowania się do nowej matury z matematyki. Zadania zostały ułożone działami matematyki i obejmują poziom podstawowy i rozszerzony. Doskonałym uzupełnieniem drugiej części książki jest *„Matematyka – nowa matura - zagadnienia teoretyczne wraz z przykładami cz.1”* gdzie zawarta jest teoria niezbędna do rozwiązywania zadań. Obydwie książki stanowią integralną całość ale zakupić je można osobno.
Autorzy obu pozycji z matematyki są przekonani, że dzięki tym obu książkom maturzysta nabędzie umiejętności rozumienia i rozwiązywania zadań z tej, całkiem przyjemnej, dziedziny, jaką jest matematyka. A co najważniejsze skutecznie przygotuje się do egzaminu maturalnego.

Wydawnictwo: Centrum Kształcenia Akademickiego CKA
Wydanie: pierwsze styczeń 2005

Format: A5
Ilość stron: 601
Cena detaliczna: 49,90 PLN
ISBN: 83-918391-4-1

ISBN 839183914-1
9 788391 839140

Przykładowe zadania z książki „Matematyka nowa matura – 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami cz. II” © CKA 2005 są dostępne na naszej stronie internetowej do bezpłatnego pobrania.

Książkę można zamówić na naszej stronie internetowej www.cka.pl lub www.zadania.pl.

Serdecznie zapraszamy!