Matematyka

trening przed maturą – zadania dla ambitnych

Zadania pochodzą z książek naszego wydawnictwa

1. Matematyka nowa matura - zagadnienia teoretyczne wraz z przykładami cz. I.
2. Matematyka nowa matura - 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzem cz.II

CKA
CENTRUM KSZTAŁCENIA AKADEMICKIEGO

„Matematyka – nowa matura - zagadnienia teoretyczne wraz z przykładami cz.1” jest książką przeznaczoną dla uczniów przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym. Zawiera opracowanie zagadnień teoretycznych zgodnych z wymaganiami programu nauczania. Zawarty materiał przedstawiony jest sposób zwięzły, zobrazowany licznymi przykładami. Książka obejmuje wszystkie zagadnienia obowiązujące na egzaminie maturalnym z matematyki tj.

podstawowe działania (procenty, średnie, wykresy i diagramy), funkcja liniowa i kwadratowa, wielomiany, równania i nierówności algebraiczne, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna, funkcje trygonometryczne, funkcje cyklometryczne, indukcja matematyczna, dwumian Newtona, ciągi liczbowe, funkcja i rachunek różniczkowy, planimetria, stereometria, geometria analityczna, kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa i zmienna losowa oraz elementy statystyki.

Doskonałym uzupełnieniem tej pozycji jest książka naszego wydawnictwa *„Matematyka – nowa matura – 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami”.*

Wydawnictwo: Centrum Kształcenia Akademickiego CKA
Wydanie: pierwsze styczeń 2005
Format: A5
Ilość stron: 237
Cena detaliczna: 35,- PLN
ISBN: 83-918391-3-3

„Matematyka – nowa matura - 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami cz.II" . Książka zawiera 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami. Jest to jedyna taka publikacja na rynku, zawierająca tak ogromną bazę zadań przeznaczoną do przygotowania się do nowej matury z matematyki. Zadania zostały ułożone działami matematyki i obejmują poziom podstawowy i rozszerzony. Doskonałym uzupełnieniem drugiej części książki jest *„Matematyka – nowa matura - zagadnienia teoretyczne wraz z przykładami cz.1*" gdzie zawarta jest teoria niezbędna do rozwiązywania zadań. Obydwie książki stanowią integralną całość ale zakupić je można osobno.
Autorzy obu pozycji z matematyki są przekonani, że dzięki tym obu książkom maturzysta nabędzie umiejętności rozumienia i rozwiązywania zadań z tej, całkiem przyjemnej, dziedziny, jaką jest matematyka. A co najważniejsze skutecznie przygotuje się do egzaminu maturalnego.

Wydawnictwo: Centrum Kształcenia Akademickiego CKA
Wydanie: pierwsze styczeń 2005

Format: A5
Ilość stron: 601
Cena detaliczna: 49,90 PLN
ISBN: 83-918391-4-1

ISBN 839183914-1
9788391839140

Przykładowe zadania z książki „Matematyka nowa matura – 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami cz. II" © CKA 2005 są dostępne na naszej stronie internetowej do bezpłatnego pobrania.

Książkę można zamówić na naszej stronie internetowej www.cka.pl lub www.zadania.pl.

Serdecznie zapraszamy!

Uwaga!

Tylko na naszych stronach internetowych:

www.zadania.pl
www.cka.pl
www.rozwiazania.pl

w dniu matury z matematyki tradycyjnie zamieścimy PEŁNE rozwiązania zadań maturalnych.

Serdecznie Zapraszamy.

CKA

ZADANIE 1.

Na poczcie pewna ilość listów została rozdzielona na m stosów, po czym z pierwszego stosu przełożono na drugi $\frac{1}{m}$-tą część listów znajdujących się w pierwszym stosie, a następnie z otrzymanego wtedy stosu przełożono $\frac{1}{m}$- tą część listów na trzeci stos itd.. Na koniec z m-tego stosu przełożono $\frac{1}{m}$-tą część na pierwszy stos i okazało się, że w każdym stosie było po A listów. Ile listów było początkowo w każdym stosie.

ROZWIĄZANIE

Wprowadźmy oznaczenia:

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ - początkowa ilość listów na kolejnych stosach

$x_1', x_2', \ldots, x_m'$ - ilość listów na stosach po przełożeniu.

Mamy:

$$\begin{cases} x_2' = \left(x_2 + \frac{1}{m}x_1\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) = A, \\ x_3' = \left(x_3 + \frac{1}{m-1}x_2'\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) = A, \\ \vdots \\ x_m' = \left(x_m + \frac{1}{m-1}x_{m-1}'\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) = A, \\ x_1' = \left(x_2 - \frac{1}{m}\right)x_1 + \frac{1}{m-1}x_m' = A. \end{cases}$$

Zatem:

$$x_k' = \left(x_k + \frac{1}{m-1}A\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right) = A, \quad \text{gdzie} \quad k = 3, 4, \ldots, m,$$

$$x_k + \frac{1}{m-1}A = \frac{m}{m-1}A.$$

Z ostatniego równania mamy:

$$x_1' = \left(1 - \frac{1}{m}\right)x_1 + \frac{1}{m-1}A = A$$

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)x_1 = \frac{m-2}{m-1}A,$$

$$x_1 = \frac{m^2 - 2m}{(m-1)^2}A.$$

Z pierwszego równania mamy:

$$x_2' = \left(x_2 + \frac{m-2}{(m-1)^2} A \right) \frac{m-1}{m} = A,$$

$$\frac{m-1}{m} x_2 = \left(1 - \frac{m-2}{m(m-1)} \right) A,$$

$$\frac{m-1}{m} x_2 = \frac{m^2-2m+2}{m(m-1)} A,$$

$$x_2 = \frac{m^2-2m+2}{(m-1)^2} A$$

Odp. $x_1 = \dfrac{m^2-2m}{(m-1)^2} A, \quad x_2 = \dfrac{m^2-2m+2}{(m-1)^2} A, \quad x_3 = x_4 = \ldots = x_n = A.$

ZADANIE 2.

Dla jakich wartości parametru m równanie $(m-1)x^4 - 2(m+4)x^2 + m = 0$ ma dokładnie dwa rozwiązania?

ROZWIĄZANIE

Podstawiamy $x^2 = t \geq 0$.

$f(t) = (m-1)t^2 - 2(m+4)t + m$.

Jeżeli równanie $f(t) = 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni to równanie wyjściowe ma dokładnie dwa rozwiązania.

Mogą zaistnieć cztery przypadki:

1^0 $t_1 t_2 < 0$ pierwiastki różnych znaków, a więc jeden dodatni i $\Delta > 0$

lub

2^0 $\Delta = 0$, i $t_1 = t_2 > 0$,

lub

3^0 $t_1 = 0$ i $t_2 > 0$,

lub

4^0 $a = 0$ i pierwiastek równania pierwszego stopnia jest dodatni.

Rozpatrujemy kolejno wymienione przypadki:

1^0 $t_1 t_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{m}{m-1} < 0, \quad m(m-1) < 0, \quad m \in (0,1).$

$\Delta = 4(m+4)^2 - 4(m-1)m > 0$,

$(m+4)^2 - (m-1)m > 0$,

$m^2 + 8m + 16 - m^2 + m > 0$,

$9m > -16$,

$m > -\frac{16}{9}$ i $m \in (0,1)$. Stąd $m \in (0,1)$.

2^0 $m = -\frac{16}{9}$

$$t_1 = t_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{2(m+4)}{2(m-1)} = \frac{-\frac{16}{9}+4}{-\frac{16}{9}-1} = -\frac{20}{25} = -\frac{4}{5} < 0,$$

czyli $m \in \varnothing$.

3^0 Podstawiając $f(0) = 0$, mamy $m = 0$, wówczas równanie ma postać $-t^2 - 8t = 0$,

stąd $t_1 = 0,\quad t_2 = -8 < 0$, czyli $m \in \varnothing$.

4^0 $a = m - 1 = 0$, $\qquad m = 1$.

Dla $m = 1$ równanie ma postać $f(t) = -10t + 1 = 0$, skąd $t = \frac{1}{10} > 0$ i warunek jest spełniony

$m = 1$. Łącznie suma otrzymanych zbiorów jest przedziałem $\left(0,1\right\rangle$.

Odp. $m \in \left(0,1\right\rangle$.

ZADANIE 3.

Rozwiąż równanie

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

ROZWIĄZANIE

Dane równanie przekształcamy do postaci iloczynowej:

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \quad \Big/ \cdot 2\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

Mamy kolejno:

$$2\left(x+\sqrt{x}\right) - 2\sqrt{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)} = 3\sqrt{x},$$

$$2x + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x^2 - x} = 3\sqrt{x},$$

$$2x - \sqrt{x} = 2\sqrt{x^2 - x}.$$

Zatem podnosząc do kwadratu obie nieujemne strony równania, mamy:

$$4x^2-4x\sqrt{x}+x=4\left(x^2-x\right),$$

$$4x^2-4x\sqrt{x}+x=4x^2-4x,$$

$$5x-4x\sqrt{x}=0,$$

$$x\left(5-4\sqrt{x}\right)=0,$$

Stąd $x=0$ - sprzeczność, gdyż podstawiając do równania wyjściowego otrzymujemy zero w mianowniku wyrażenia występującego po prawej stronie równania.

Wobec tego $4\sqrt{x}=5$, stąd $\sqrt{x}=\frac{5}{4}$, $x=\frac{25}{16}$.

Zauważmy, że ostatnie rozwiązanie należy do dziedziny równania, gdyż po podstawieniu do którejkolwiek postaci równoważnej równania, otrzymujemy równość.

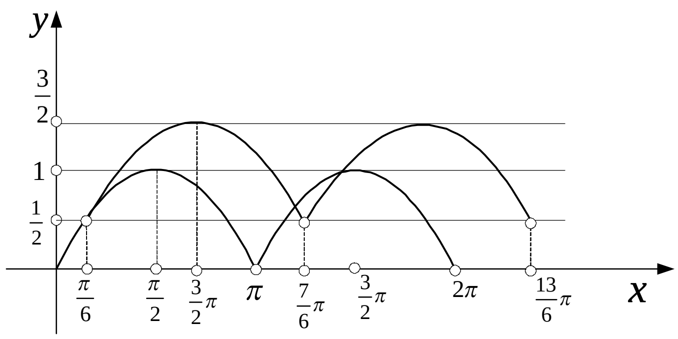
Odp. $x=\frac{25}{16}$.

ZADANIE 4.

Narysować wykres funkcji $y=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|+\frac{1}{2}$.

ROZWIĄZANIE.

Wykres funkcji jest przesunięciem wykresu funkcji $f(x)=\left|\sin x\right|$ o wektor $\vec{u}=\left[\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right]$ co wynika z postaci $y-\frac{1}{2}=\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right|$



ZADANIE 5.

Wykazać, że w trójkącie, którego kąty spełniają równość $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 0$, jeden z kątów równa się 60^0.

ROZWIĄZANIE

Ponieważ α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta, więc

$\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, skąd $\sin\gamma = \sin(\pi - (\alpha + \beta))$.

Wobec tego nasze równanie przyjmuje postać:

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\left[\pi - (\alpha + \beta)\right] = 0,$$

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3(\alpha + \beta) = 0.$$

Wobec zależności: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, oraz $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, mamy:

$$2\sin\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta) + 2\sin\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{3}{2}(\alpha+\beta) = 0,$$

stąd $2\sin\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\left[\cos\frac{3}{2}(\alpha-\beta) + \cos\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\right] = 0$.

Wykorzystując wzór na sumę cosinusów, otrzymujemy:

$$2\sin\frac{3}{2}(\alpha+\beta)\cdot 2\cos\frac{3}{2}\alpha\cos\frac{3}{2}\beta = 0,$$

zatem

$$\sin\frac{3}{2}(\alpha+\beta) = 0 \quad \text{lub} \quad \cos\frac{3}{2}\alpha = 0 \quad \text{lub} \quad \cos\frac{3}{2}\beta = 0.$$

Rozwiązujemy poszczególne równania trygonometryczne.

$$\frac{3}{2}(\alpha+\beta) = k\pi \quad \text{lub} \quad \frac{3}{2}\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{lub} \quad \frac{3}{2}\beta = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Pierwsze równanie ma rozwiązanie dla $k = 1$, mamy zatem:

$\alpha + \beta = \frac{2}{3}\pi$, ponieważ $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, więc $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

Drugie równanie ma rozwiązanie:

$\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$, więc równanie ma sens dla $k = 0$ bo $\alpha \in (0, \pi)$.

Wobec tego $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

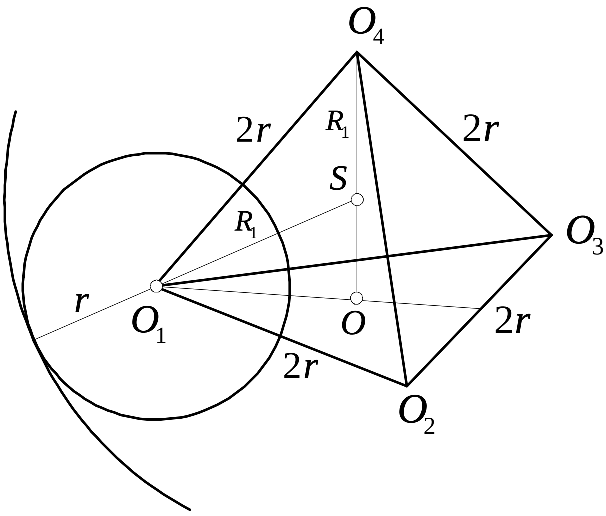
Podobnie trzecie równanie ma rozwiązanie $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Wykazaliśmy, że gdy spełnione jest równanie $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 0$ to jeden z kątów równa się $\frac{\pi}{3}$.

ZADANIE 6.

Wyznacz promień najmniejszej kuli, w której mieszczą się cztery kule o promieniu *r* ułożone w ten sposób, że każda z nich jest styczna do trzech pozostałych.

ROZWIĄZANIE



Środki kul o promieniu *r* tworzą czworościan foremny o krawędzi 2*r*. Wyznaczamy promień R_1 kuli opisanej na tym czworościanie, wówczas szukany promień kuli obejmującej te cztery kule jest równy:

$R = R_1 + r$.

Mamy:

$$|O_1O| = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2r = \frac{2\sqrt{3}}{3}r = \frac{2r}{\sqrt{3}},$$

$$|O_4O|^2 = (2r)^2 - \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4r^2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{8r^2}{3}$$

$$|O_4O| = 2\sqrt{\frac{2}{3}}r.$$

Z trójkąta prostokątnego O_1OS obliczamy R_1:

$$|OS|^2 + |O_1O|^2 = R_1^2,$$

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r - R_1\right)^2 + \left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)^2 = R_1^2,$$

$$\frac{8}{3}r^2 - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}rR_1 + R_1^2 + \frac{4r^2}{3} = R_1^2,$$

$$R_1 = \frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{2}}.$$

Otrzymujemy, więc $R = \frac{\sqrt{3}r}{\sqrt{2}} + r$, $\quad R = \left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)r$. Odp. $R = \left(1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)r$.

ZADANIE 7.

Na ile sposobów można zbiór n – elementowy podzielić na dwa niepuste i rozłączne podzbiory.

ROZWIĄZANIE

Wiadomo, że ze zbioru n elementowego można utworzyć 2^n różnych podzbiorów /uwzględniając zbiór pusty oraz zbiór pełny z którego tworzymy podzbiory/. Każdy podzbiór A wyznacza podział $\{A, A'\}$ danego zbioru n elementowego.

Ponieważ ma być $A \neq \emptyset$ i $A' \neq \emptyset$, więc dwa podzbiory $\emptyset$ i zbiór pełny n elementowy należy wykluczyć. Mamy więc $2^n - 2$ różnych podziałów na dwa niepuste podzbiory. Jeżeli uwzględnimy, że kolejność podzbiorów nie ma znaczenia otrzymujemy $\frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$ różnych podziałów zbioru n elementowego na dwa niepuste podzbiory.

Odp. $2^{n-1} - 1$.