

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

13 KWIETNIA 2024

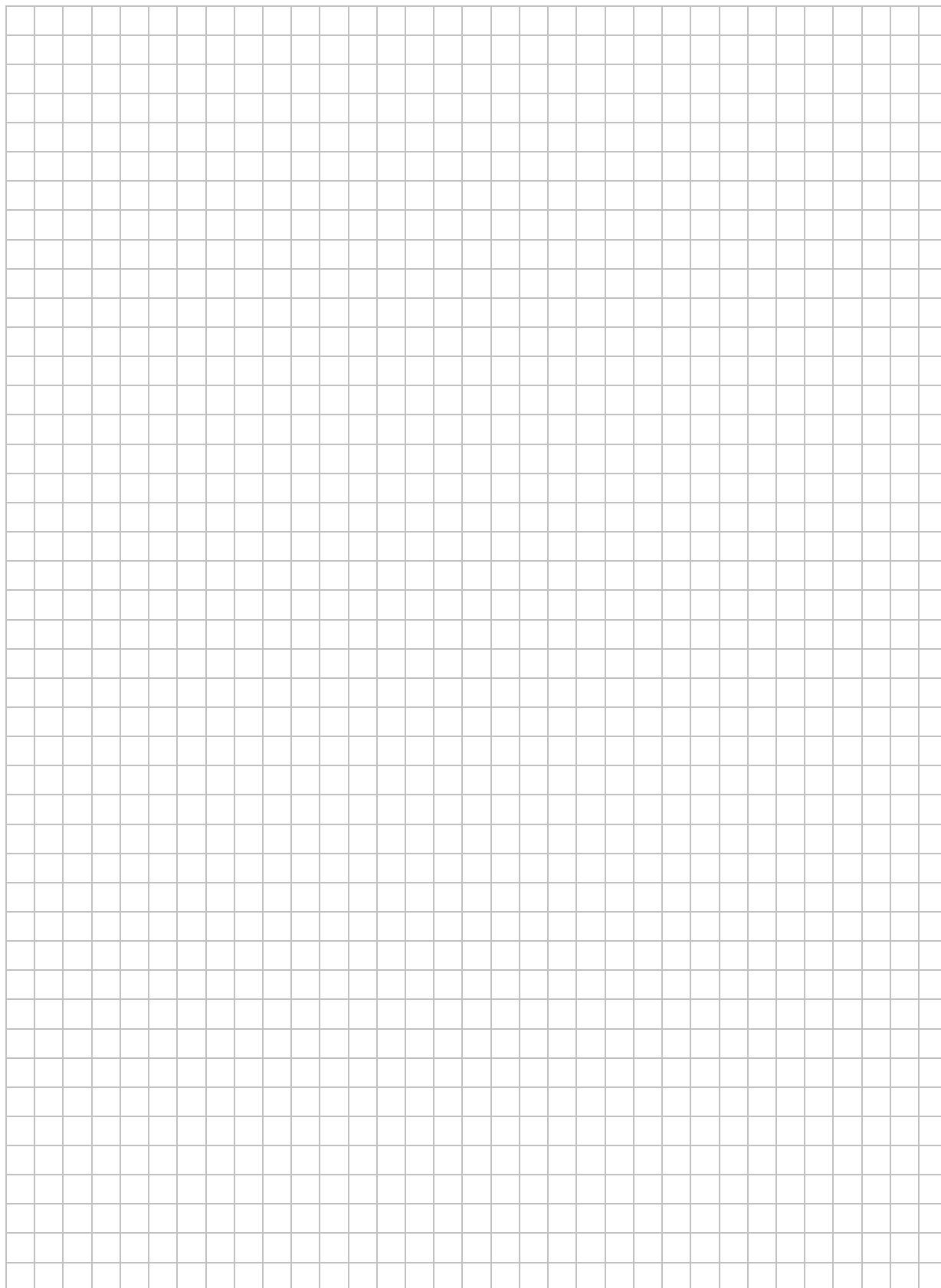
CZAS PRACY: 180 MINUT

ZADANIE 1 (2 PKT)

Dane są liczby

$$a = 27^{\log_3 18} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{\log_4 2024}{\log_8 2024}$$

Oblicz $a \cdot b$.



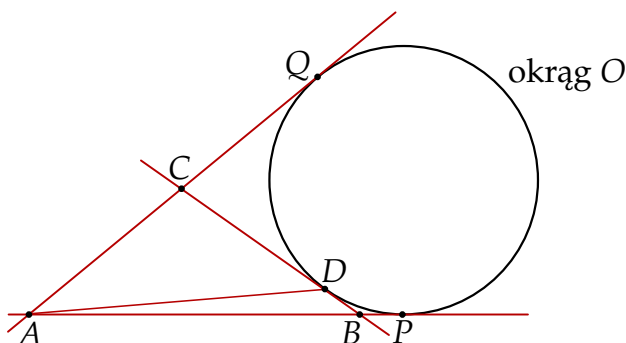
ZADANIE 2 (2 PKT)

Prosta postaci $y = a(x + 1) + 1$ jest styczna do wykresu funkcji $y = \frac{|3-2x|}{|3x-2|}$ w punkcie $P = (-1, 1)$. Oblicz a .

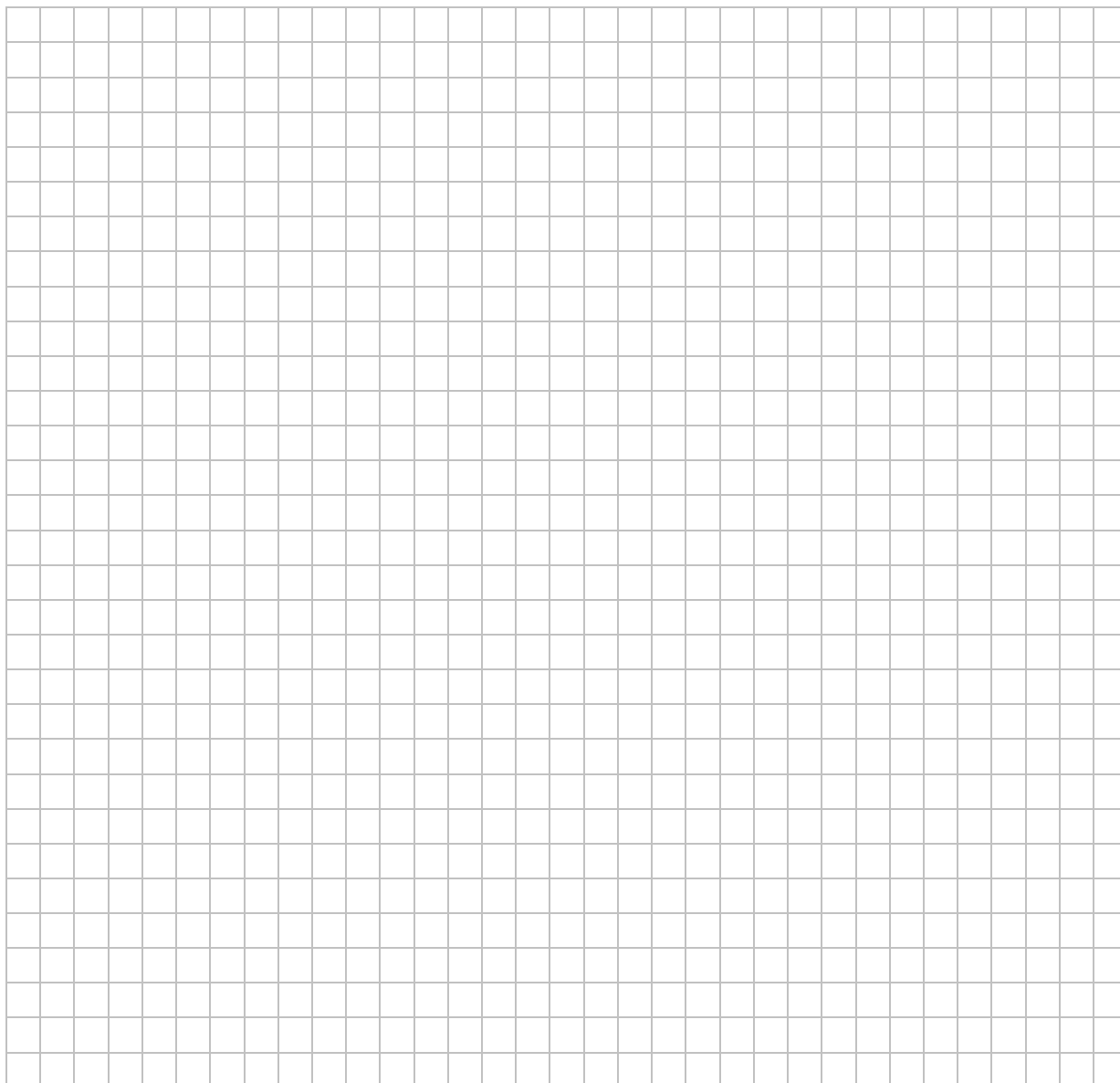


ZADANIE 3 (3 PKT)

Dany jest okrąg O . Przez punkt A poprowadzono dwie proste, które są styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – P oraz Q . Przez punkt B leżący na odcinku AP poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie D , która przecięła odcinek AQ w punkcie C (zobacz rysunek).

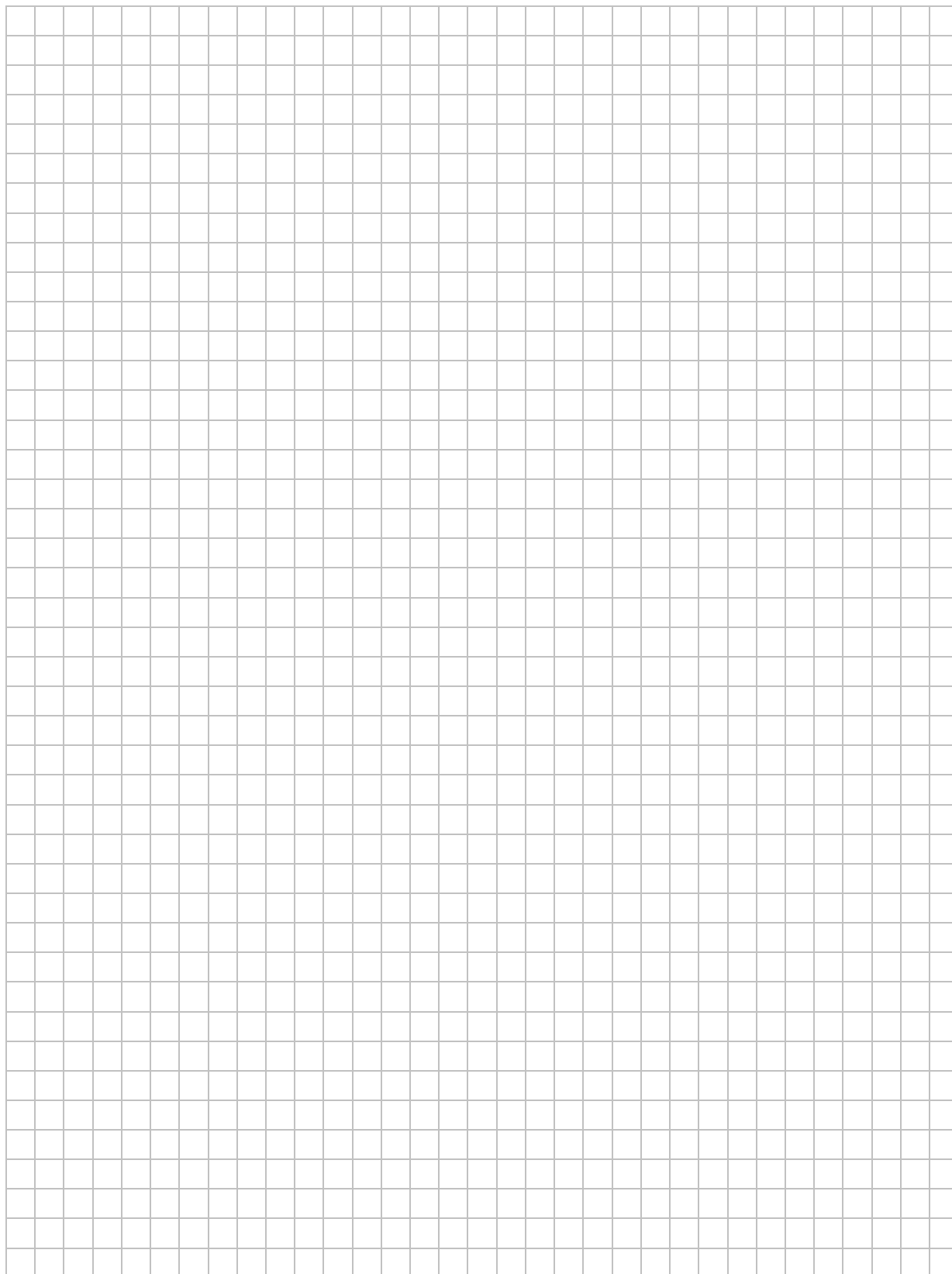


Wykaż, że jeżeli $|AQ| = 6 \cdot |BP|$ oraz $|CD| = 3 \cdot |BD|$, to trójkąt ABC nie jest równoramienny.



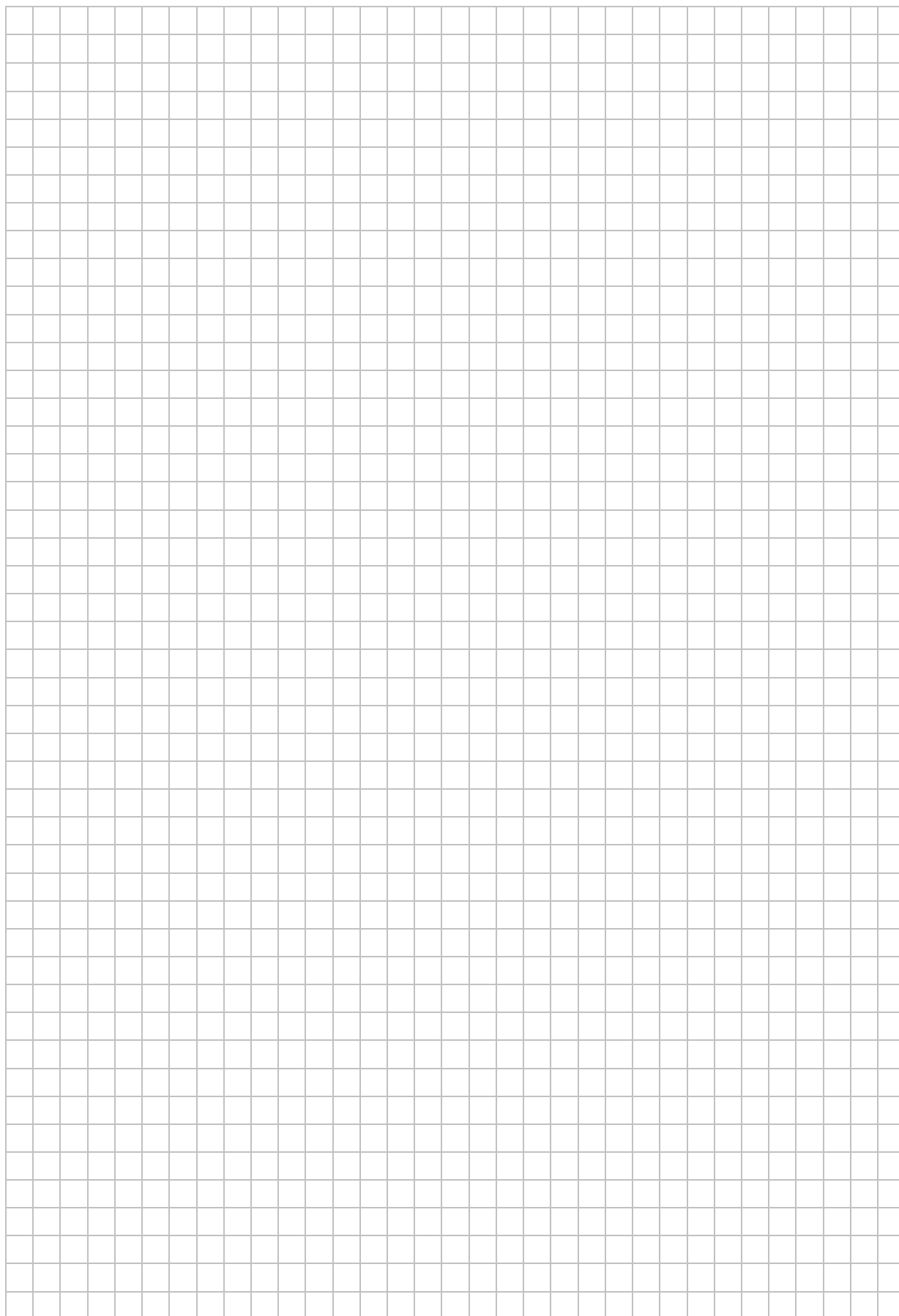
ZADANIE 4 (3 PKT)

Wojtek i Łukasz postanowili rozegrać między sobą dziesięć partii gry w rzutki. Prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej partii przez Wojtkę jest trzy razy większe, niż prawdopodobieństwo wygrania partii przez Łukasza i każda partia kończy się zwycięstwem jednego z zawodników. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że Wojtek nie wygrał wszystkich partii, ale wygrał ich co najmniej 7. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.



ZADANIE 5 (3 PKT)

Rozwiąż równanie $2 \sin 3x \cos 7x = \sin 10x + \frac{\sqrt{3}}{2}$.



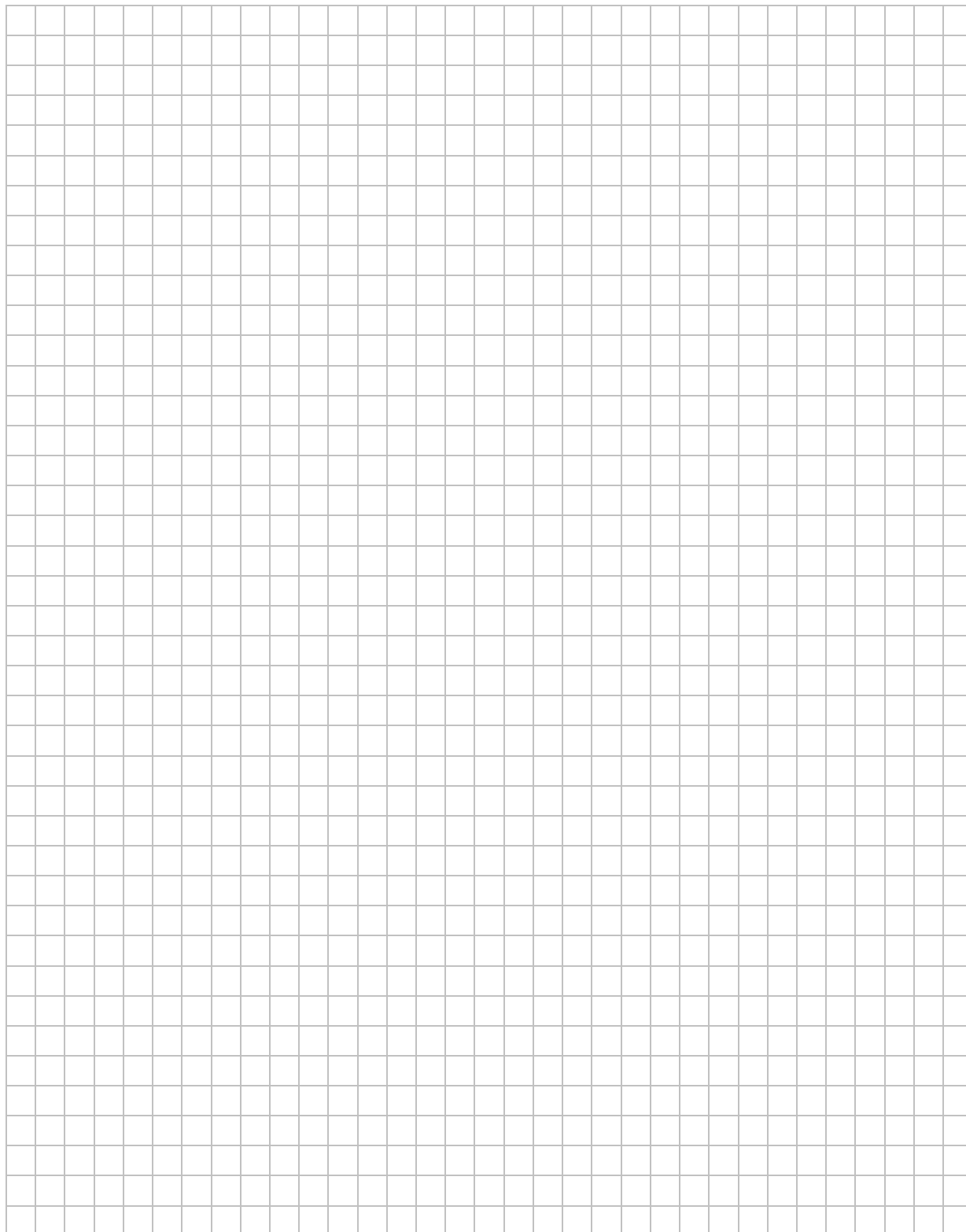
ZADANIE 6 (3 PKT)

Wykaż, że jeżeli liczby dodatnie a i b spełniają warunek

$$a^2 + \frac{2b^3}{a} = 3b^2,$$

to spełniają też równość

$$a + \frac{2b^2}{a} = 3b.$$

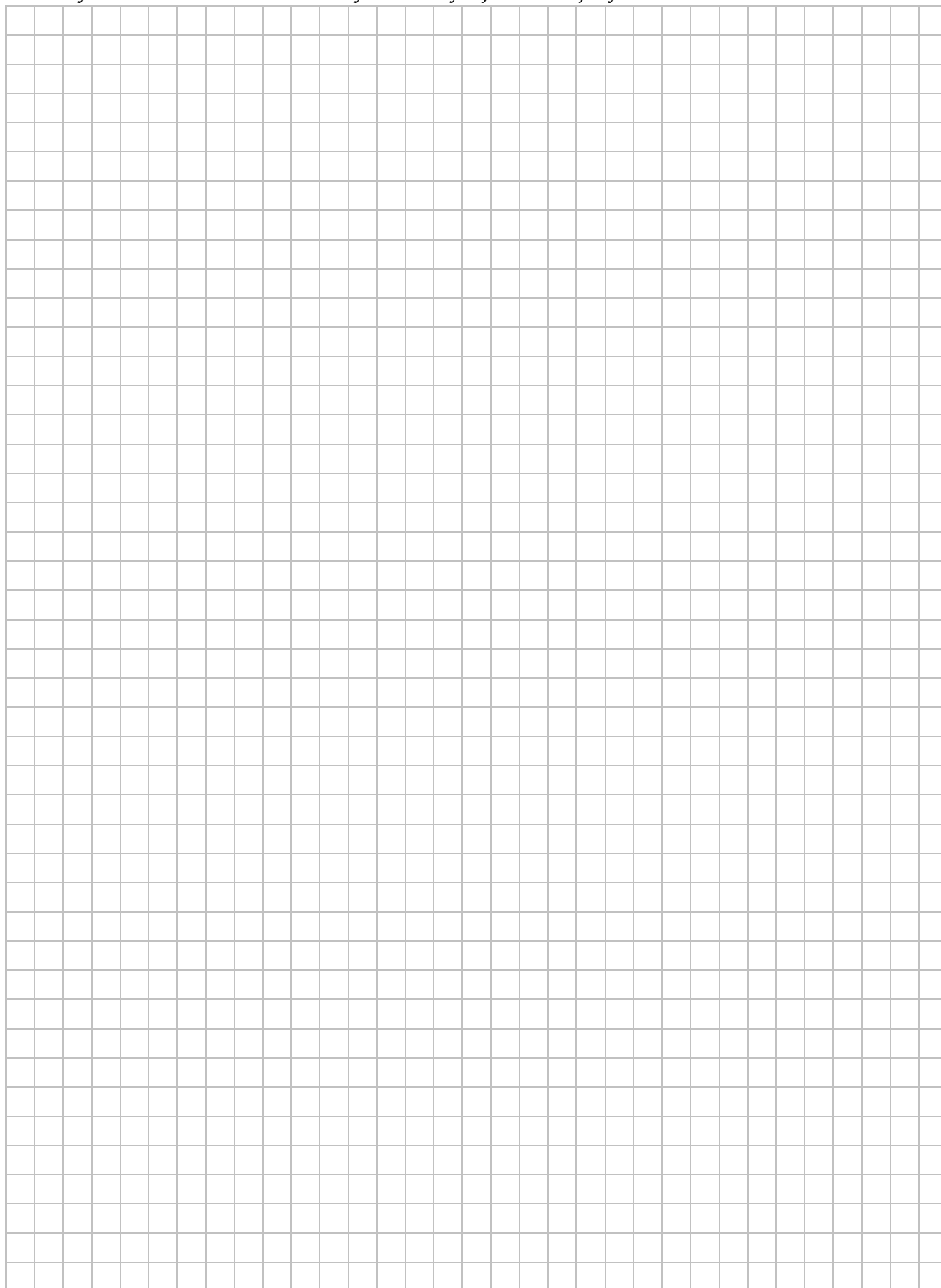


ZADANIE 7 (4 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie

$$|x^2 + 2x - 3| = m$$

ma cztery różne rozwiązania, których iloczyn jest mniejszy od 5.

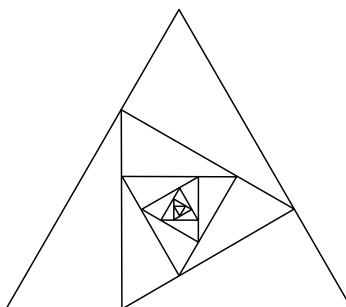




ZADANIE 8 (4 PKT)

Konstruujemy ciąg trójkątów równobocznych T_1, T_2, T_3, \dots następująco:

- T_1 jest trójkątem równobocznym o polu 1.
- dla każdego $n \geq 2$, trójkąt T_n ma wierzchołki na trzech różnych bokach trójkąta T_{n-1} i każdy z wierzchołków trójkąta T_n dzieli odpowiedni bok trójkąta T_{n-1} w stosunku 1:2.



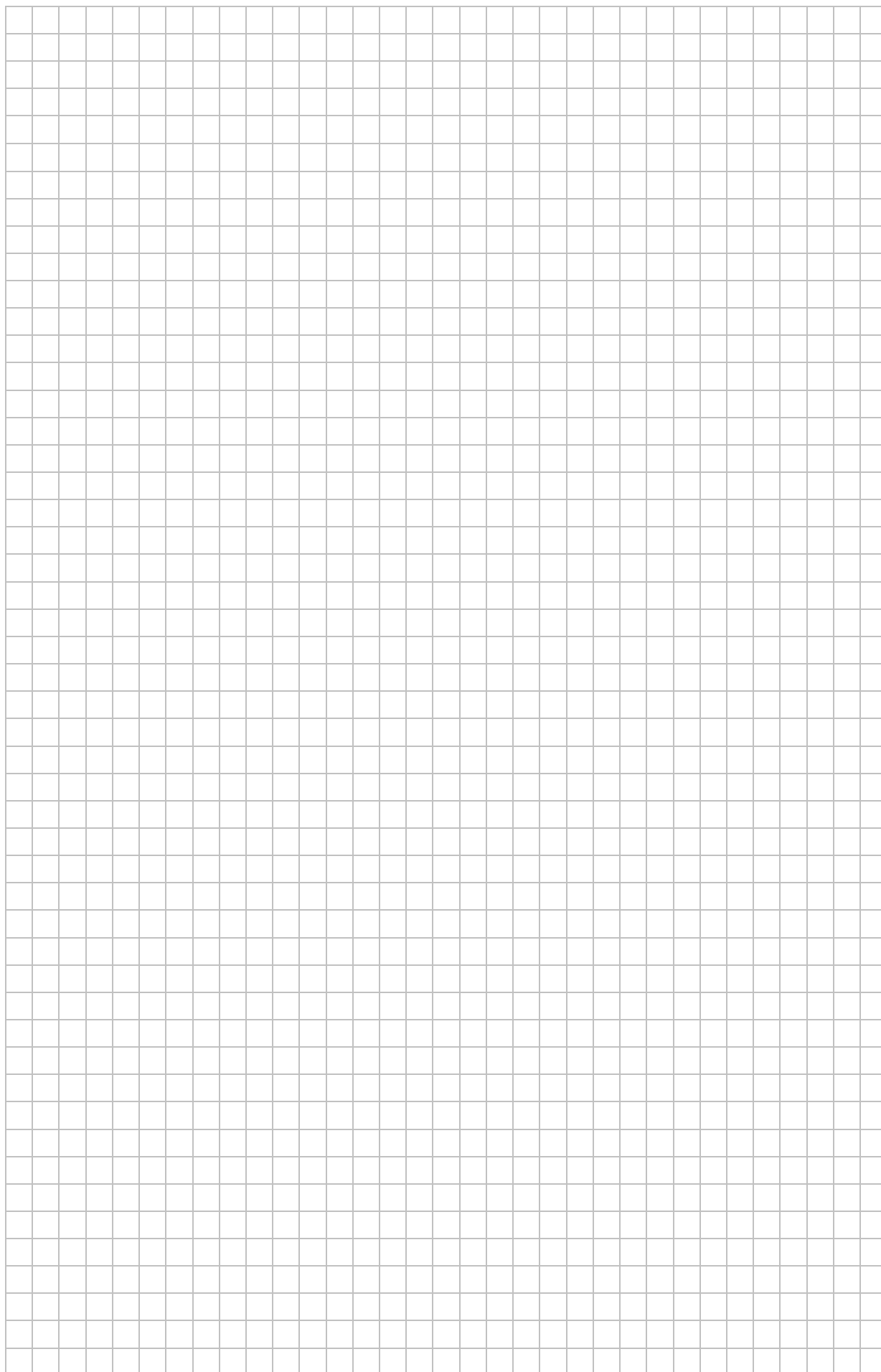
Oblicz sumę pól wszystkich trójkątów T_1, T_2, T_3, \dots



ZADANIE 9 (5 PKT)

Pierwiastki równania $x^3 + (m - 1)x^2 + (m - 12)x + 8 = 0$ z niewiadomą x tworzą trzywyrazowy ciąg geometryczny. Oblicz m oraz sumę kwadratów tych pierwiastków.





ZADANIE 10 (5 PKT)

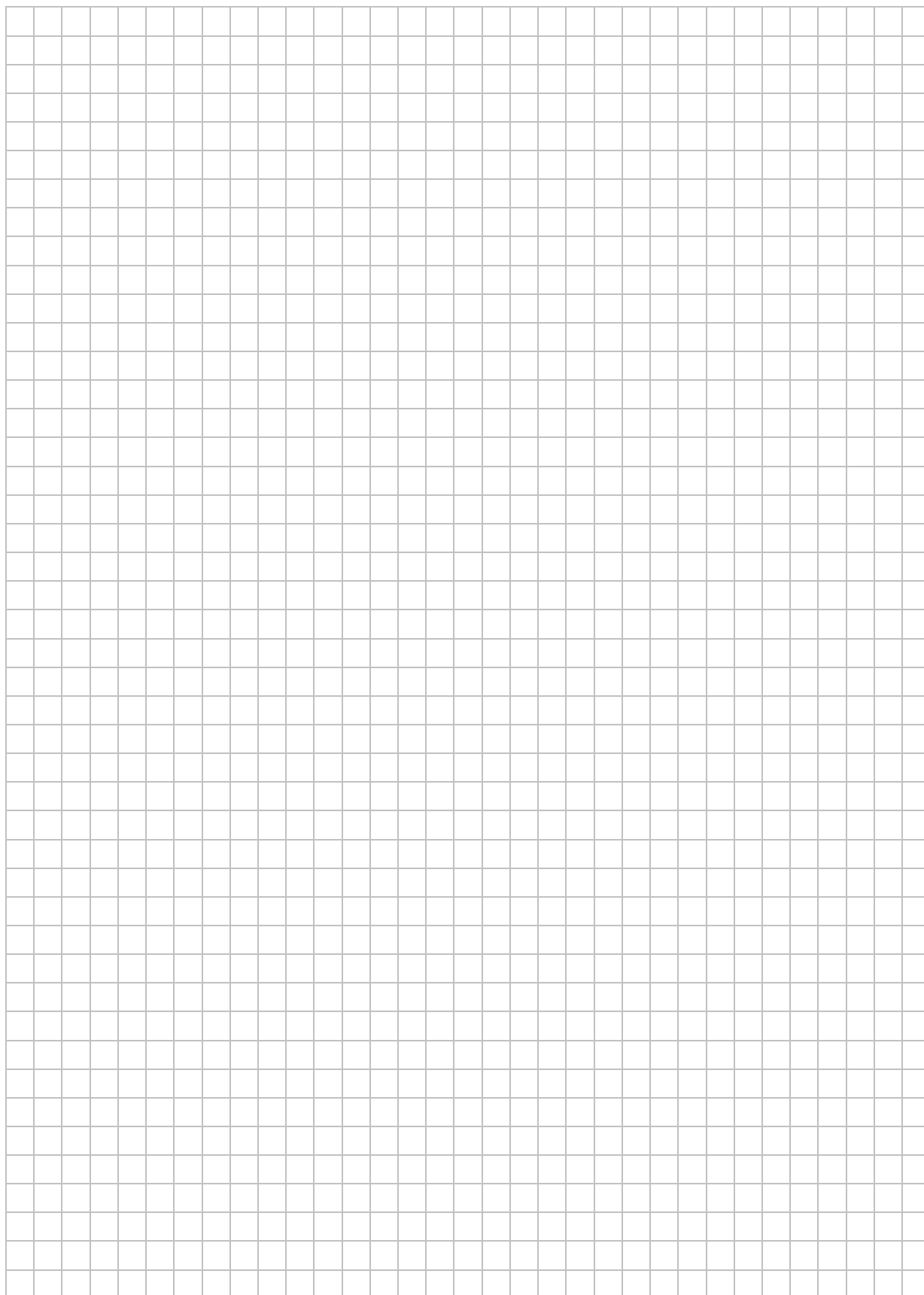
Odcinek AB jest dłuższą podstawą trapezu równoramiennego $ABCD$ opisanego na okręgu o środku O . Oblicz pole tego trapezu jeżeli $|AO| = 6$ i $\sin \angle ABC = \frac{4}{5}$.





ZADANIE 11 (5 PKT)

Przekątne sąsiednich ścian bocznych prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka tworzą z jego podstawą kąty o miarach $\frac{\pi}{6}$ i α . Cosinus kąta między tymi przekątnymi jest równy $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Wyznacz miarę kąta α .



ZADANIE 12 (5 PKT)

Prosta k przecina okrąg o środku $S = (2, 1)$ w punktach $A = (3, -2)$ i B , przy czym $|AB| = 2\sqrt{5}$. Wyznacz równanie prostej k .





