VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
Zawody stopnia trzeciego
(19 marca 2011 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

1. Czy istnieją takie liczby całkowite a i b, że liczby

$$a^2+b \quad \text{oraz} \quad a+b^2$$

są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że takie liczby a oraz b istnieją. Wtedy liczba $(a^2+b)-(b^2+a)$ jest równa 1 lub -1. Z drugiej strony,

$$(a^2+b)-(a+b^2)=a(a-1)-b(b-1)\,.$$

Obie liczby $a(a-1)$ i $b(b-1)$ są parzyste, skąd wynika, że liczba $a(a-1)-b(b-1)$ jest także parzysta. Wobec tego liczba $(a^2+b)-(b^2+a)$ nie może być równa ani 1 ani -1. Zatem liczby a, b o postulowanej własności nie istnieją.

2. Dany jest 99-kąt foremny. Wyznacz liczbę trójkątów równoramiennych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego wielokąta.

Rozwiązanie

Wybierzmy dowolny wierzchołek C danego 99-kąta. Wyznaczymy najpierw liczbę trójkątów ABC spełniających równość $AC=BC$, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego 99-kąta.

Rozpatrzmy okrąg opisany na 99-kącie oraz niech k będzie prostą przechodzącą przez punkt C i zawierającą średnicę tego okręgu. Wówczas punkty A i B są symetryczne względem prostej k. Ponadto prosta k zawiera punkt C i nie przechodzi przez żaden inny wierzchołek danego 99-kąta. Zatem po każdej stronie prostej k leży $(99-1)/2=49$ wierzchołków 99-kąta. Punkt A możemy więc wybrać na 49 sposobów; punkt B jest wtedy wyznaczony jednoznacznie. Wobec tego istnieje 49 trójkątów ABC spełniających powyższe warunki.

Z kolei wierzchołek C możemy wybrać na 99 sposobów. Zatem łączną liczbę trójkątów spełniających warunki zadania uzyskamy, mnożąc 49 przez 99 i odejmując od wyniku podwojoną liczbę trójkątów równobocznych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego 99-kąta. A tych trójkątów równobocznych jest $99/3=33$.

Reasumując: Łączna liczba trójkątów spełniających warunki zadania wynosi

$$49\cdot 99-2\cdot 33=\mathbf{4785}\,.$$

3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg styczny do prostej AI w punkcie I i przechodzący przez punkt B przecina bok BC w punkcie P (różnym od B). Proste IP i AC przecinają się w punkcie Q. Wykaż, że punkt I jest środkiem odcinka PQ.

Rozwiązanie

Ponieważ punkt I leży na dwusiecznej kąta ACB, więc wystarczy wykazać, że $\sphericalangle PIC=90^\circ$. Oznaczmy przez D punkt przecięcia prostych AI i BC. Wówczas $\sphericalangle DIP=\sphericalangle IBP$ oraz $\sphericalangle CID=\sphericalangle CAI+\sphericalangle ACI$. Wobec tego

$$\sphericalangle PIC=\sphericalangle DIP+\sphericalangle CID=\sphericalangle IBP+\sphericalangle CAI+\sphericalangle ACI=\frac{1}{2}(\sphericalangle ABC+\sphericalangle CAB+\sphericalangle ACB)=90^\circ\,,$$

co kończy dowód.

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego

4. Liczby p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba p^2+q^2 nie jest podzielna przez liczbę $p+q$.

Rozwiązanie

Z równości $(p+q)^2 = p^2+q^2+2pq$ wynika, że jeśli liczba p^2+q^2 jest podzielna przez $p+q$, to także liczba $2pq$ jest podzielna przez $p+q$.

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $p<q$. Liczby $p+q$ i q są względnie pierwsze. Wobec tego z podzielności $p+q\,|\,2pq$ wynika, że $p+q\,|\,2p$. Jednak podzielność ta nie może być spełniona, bowiem $p+q>2p$.

Uzyskaliśmy sprzeczność, z której wynika, że liczba p^2+q^2 nie może być podzielna przez $p+q$, jeśli p i q są różnymi liczbami pierwszymi.

---

5. Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty A_1, A_2, A_3, ..., A_{100}. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P, dla którego

$$PA_1+PA_2+\ldots+PA_{100} \geqslant 100\,.$$

Rozwiązanie

Wybierzmy dowolną średnicę danego koła i oznaczmy jej końce przez P_1 i P_2. Wykażemy, że co najmniej jeden z punktów P_1, P_2 spełnia postulowaną w treści zadania nierówność.

Wybierzmy dowolny punkt A_i $(i=1,2,\ldots,100)$. Wykorzystując nierówność trójkąta dla trójkąta $P_1P_2A_i$, otrzymujemy

$$P_1A_i+P_2A_i \geqslant P_1P_2 = 2\,.$$

A zatem

$$(P_1A_1+P_1A_2+\ldots+P_1A_{100})+(P_2A_1+P_2A_2+\ldots+P_2A_{100}) \geqslant 2\cdot 100 = 200\,.$$

Wobec tego co najmniej jedna z liczb

$$P_1A_1+P_1A_2+\ldots+P_1A_{100} \quad \text{lub} \quad P_2A_1+P_2A_2+\ldots+P_2A_{100}$$

jest większa lub równa 100.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego