Schemat oceniania zadań otwartych

Egzamin maturalny z matematyki

Poziom rozszerzony

Czerwiec 2014

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Rozwiąż nierówność $|x+6|-2|x-4| \le 2x-3$.

<u>I sposób rozwiązania</u> (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: A. $(-\infty,-6)$, B. $\langle -6,4)$, C. $\langle 4,+\infty)$.

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

A. $x\in(-\infty,-6)$	B. $x\in\langle -6,4)$	C. $x\in\langle 4,+\infty)$
$-x-6-2(-x+4)\le 2x-3$ $-x-14\le -3$ $x\ge -11$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-11\le x<-6$	$x+6-2(-x+4)\le 2x-3$ $x-2\le -3$ $x\le -1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-6<x\le -1$	$x+6-2(x-4)\le 2x-3$ $-x+14\le 2x-3$ $x\ge 5\frac{2}{3}$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $x\ge 5\frac{2}{3}$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-11\le x\le -1$ lub $x\ge 5\frac{2}{3}$.

Zapisujemy odpowiedź: Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności jest $\langle -11,-1\rangle \cup \langle 5\frac{2}{3},+\infty)$.

<u>II sposób rozwiązania</u> (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki:

I. $\begin{cases} x+6\ge 0 \\ x-4\ge 0 \end{cases}$ II. $\begin{cases} x+6\ge 0 \\ x-4< 0 \end{cases}$ III. $\begin{cases} x+6< 0 \\ x-4\ge 0 \end{cases}$ IV. $\begin{cases} x+6< 0 \\ x-4< 0 \end{cases}$

W każdym z nich rozwiązujemy nierówność bądź układ nierówności

$\begin{cases} x+6\ge 0 \\ x-4\ge 0 \\ x+6-2(x-4)\le 2x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x+6\ge 0 \\ x-4< 0 \\ x+6-2(-x+4)\le 2x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x+6< 0 \\ x-4\ge 0 \\ -x-6-2(x-4)\le 2x-3 \end{cases}$	$\begin{cases} x+6< 0 \\ x-4< 0 \\ -x-6-2(-x+4)\le 2x-3 \end{cases}$
$\begin{cases} x\ge -6 \\ x\ge 4 \\ 3x\ge 17 \end{cases}$	$\begin{cases} x\ge -6 \\ x<4 \\ x\le -1 \end{cases}$	$\begin{cases} x<-6 \\ x\ge 4 \\ 5x\ge 5 \end{cases}$	$\begin{cases} x<-6 \\ x<4 \\ x\ge -11 \end{cases}$
$x\ge 5\frac{2}{3}$	$-6\le x\le -1$	niemożliwe	$-11\le x<-6$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź: $-11\le x\le -1$ lub $x\ge 5\frac{2}{3}$.

Możemy też zapisać odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest $\langle -11,-1\rangle \cup \langle 5\frac{2}{3},+\infty)$.

<u>Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający

- wyróżni na osi liczbowej przedziały: $(-\infty,-6)$, $\langle -6,4)$, $\langle 4,+\infty)$.

albo

- zapisze cztery przypadki:

I. $\begin{cases} x+6\ge 0 \\ x-4\ge 0 \end{cases}$ II. $\begin{cases} x+6\ge 0 \\ x-4< 0 \end{cases}$ III. $\begin{cases} x+6< 0 \\ x-4\ge 0 \end{cases}$ IV. $\begin{cases} x+6< 0 \\ x-4< 0 \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Zdający

- zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.:
  A. dla $x \in (-\infty, -6)$ mamy $-x-6-2(-x+4) \le 2x-3$,
  B. dla $x \in \langle -6, 4)$ mamy $x+6-2(-x+4) \le 2x-3$,
  C. dla $x \in \langle 4, +\infty)$ mamy $x+6-2(x-4) \le 2x-3$.

albo

- zapisze nierówności w poszczególnych przypadkach, np.:
  I. gdy $x+6 \ge 0$ i $x-4 \ge 0$, to wtedy $x+6-2(x-4) \le 2x-3$,
  II. gdy $x+6 \ge 0$ i $x-4 < 0$, to wtedy $x+6-2(-x+4) \le 2x-3$,
  III. gdy $x+6 < 0$ i $x-4 \ge 0$, to wtedy $-x-6-2(x-4) \le 2x-3$ (lub stwierdzi, że ten przypadek jest niemożliwy),
  IV. gdy $x+6 < 0$ i $x-4 < 0$, to wtedy $-x-6-2(-x+4) \le 2x-3$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....3 pkt

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko dla dwóch przedziałów (spośród A., B., C.), popełni błąd w trzecim i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach (spośród I., II., IV.) , popełni błąd w trzecim przypadku oraz stwierdzi, że przypadek III. jest niemożliwy, i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający zapisze odpowiedź: $x \in \langle -11, -1 \rangle \cup \langle 5\frac{2}{3}, +\infty)$.

<u>Uwaga:</u>
We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte), to przyznajemy za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

<u>III sposób rozwiązania</u> (graficzne)

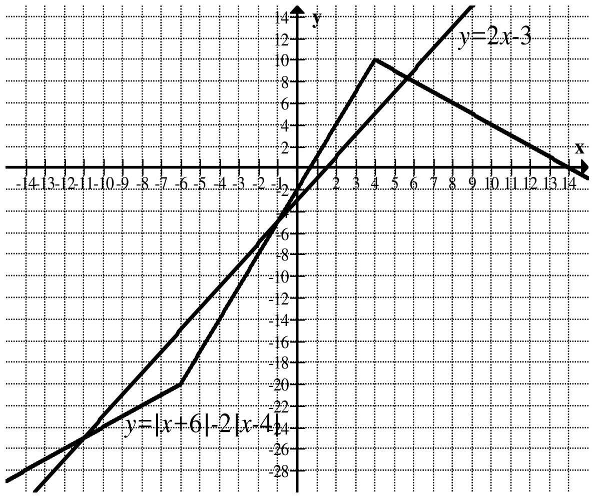
Rysujemy wykresy funkcji $f(x) = |x+6| - 2|x-4|$ i $g(x) = 2x-3$.

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, -6)$, $\langle -6, 4)$, $\langle 4, \infty)$.

Zapisujemy wzór funkcji *f* w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.:

$$f(x) = \begin{cases} x-14 & \text{dla } x \in (-\infty, -6) \\ 3x-2 & \text{dla } x \in \langle -6, 4) \\ -x+14 & \text{dla } x \in \langle 4, +\infty) \end{cases}.$$

Rysujemy wykresy funkcji f i g:



Odcięte punktów przecięcia wykresów funkcji f i g możemy obliczyć rozwiązując równanie $x-14=2x-3$ w przedziale $(-\infty,-6)$, równanie $3x-2=2x-3$ w przedziale $\langle -6,4)$ oraz równanie $-x+14=2x-3$ w przedziale $\langle 4,\infty)$. Otrzymujemy wówczas $x=-11$, $x=-1$, $x=5\frac{2}{3}$. Stąd i z narysowanych wykresów funkcji f i g podajemy te wszystkie argumenty, dla których $f(x)\le g(x)$: $x\in\langle -11,-1\rangle\cup\langle 5\frac{2}{3},+\infty)$.

<u>Uwaga</u>
Możemy też odczytać odcięte punktów przecięcia wykresów f i g z rysunku. Dwie pierwsze, tj. $x=-11$, $x=-1$ można łatwo odczytać, nieco trudniej odczytać trzecią, czyli $x=5\frac{2}{3}$. Następnie sprawdzamy, że $f(-11)=g(-11)$, $f(-1)=g(-1)$ $f(5\frac{2}{3})=g(5\frac{2}{3})$, a następnie zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności $f(x)\le g(x)$: $x\in\langle -11,-1\rangle\cup\langle 5\frac{2}{3},+\infty)$.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zdający wyróżni przedziały: $(-\infty,-6)$, $\langle -6,4)$, $\langle 4,\infty)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach, np.:

A. dla $x\in(-\infty,-6)$ mamy $f(x)=x-14$

B. dla $x\in x\in\langle -6,4)$ mamy $f(x)=3x-2$

C. dla $x\in\langle 2\frac{1}{2},+\infty)$ mamy $f(x)=-x+14$

lub

$$f(x)=\begin{cases} x-14 & \text{dla } x\in(-\infty,-6) \\ 3x-2 & \text{dla } x\in\langle -6,4) \\ -x+14 & \text{dla } x\in\langle 4,+\infty) \end{cases}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający narysuje wykres funkcji *f* i prostą o równaniu $y = 2x - 3$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

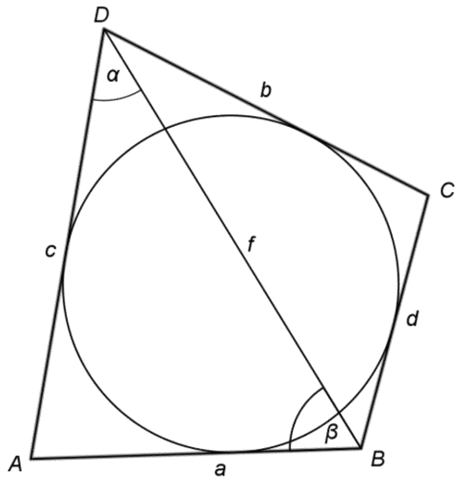
Zdający zapisze odpowiedź: $x \in \langle -11, -1 \rangle \cup \langle 5\frac{2}{3}, +\infty)$.

Uwaga

1. Jeśli zdający błędnie poda odciętą ostatniego punktu przecięcia, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeśli zdający jedynie odczyta z wykresu odcięte punktów przecięcia, ale nie sprawdzi, że $f(-11) = g(-11)$, to otrzymuje **3 punkty.**

Zadanie 2. (*4 pkt*)

W czworokąt $ABCD$, w którym $|AD| = 5\sqrt{3}$ i $|CD| = 6$, można wpisać okrąg. Przekątna BD tworzy z bokiem AB czworokąta kąt o mierze $60°$, natomiast z bokiem AD kąt, którego sinus jest równy $\frac{3}{4}$. Wyznacz długości boków AB i BC oraz długość przekątnej BD tego czworokąta.



Rozwiązanie

Wykonujemy ilustrację graficzną, wprowadzając oznaczenia i zaznaczamy kąty:

$|AD| = c = 5\sqrt{3}$,

$|CD| = b = 6$,

$\sin|\angle ADB| = \sin\alpha = \frac{3}{4}$ i $|\angle ABD| = \beta = 60^\circ$.

Korzystając z twierdzenia sinusów w trójkącie ABD obliczamy $|AB| = a$:

$$\frac{c}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\frac{3}{4}}$$

$10 = \frac{a}{\frac{3}{4}}$, skąd $a = \frac{15}{2} = 7{,}5$

Obliczamy $|BC| = d$, korzystając z warunku wpisywalności okręgu w czworokąt wypukły:

$$c + d = a + b \quad \Rightarrow 5\sqrt{3} + d = \frac{15}{2} + 6 \, / \cdot 2$$

$$10\sqrt{3} + 2d = 15 + 12$$

$$2d = 27 - 10\sqrt{3}$$

$$d = \frac{27 - 10\sqrt{3}}{2}$$

Korzystając z twierdzenia cosinusów w trójkącie ABD, obliczamy $|BD| = f$:

$$c^2 = a^2 + f^2 - 2af \cdot \cos\beta \Rightarrow 75 = \frac{225}{4} + f^2 - 2 \cdot \frac{15}{2} \cdot f \cdot \frac{1}{2}$$

$$225 + 4f^2 - 30f = 300$$

$$4f^2 - 30f - 75 = 0$$

$$\Delta = 900 + 1200 = 2100 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\Delta} = 10\sqrt{21}$$

$$f_1 = \frac{30 - 10\sqrt{21}}{8} \quad \text{lub} \quad f_2 = \frac{30 + 10\sqrt{21}}{8}$$

$$f_1 = \frac{15 - 5\sqrt{21}}{4} < 0 \quad \text{lub} \quad f_2 = \frac{15 + 5\sqrt{21}}{4} > 0$$

Zatem $f = \frac{15+5\sqrt{21}}{4}$.

Odp.: Boki czworokąta mają długości: $|AB| = 7{,}5$, $|BC| = \frac{27-10\sqrt{3}}{2}$, a przekątna ma długość

$|BD| = \frac{15+5\sqrt{21}}{4}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Obliczenie długości boku *AB*: $|AB| = a = \frac{15}{2} = 7{,}5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

- Obliczenie długości boku BC: $|BC| = d = \frac{27-10\sqrt{3}}{2}$

albo

- Rozwiązanie równania umożliwiającego wyznaczenie długości przekątnej BD czworokąta: $|BD| = f_1 = \frac{15-5\sqrt{21}}{4}$ lub $|BD| = f_2 = \frac{15+5\sqrt{21}}{4}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie długości boku $|BC| = d = \frac{27-10\sqrt{3}}{2}$ i rozwiązanie równania umożliwiającego wyznaczenie długości przekątnej *BD* czworokąta: $|BD| = f_1 = \frac{15-5\sqrt{21}}{4}$ lub $|BD| = f_2 = \frac{15+5\sqrt{21}}{4}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Odrzucenie jednego z rozwiązań równania $4f^2 - 30f - 75 = 0$ i podanie odpowiedzi:

$|AB| = 7{,}5$, $|BC| = \frac{27-10\sqrt{3}}{2}$, $|BD| = \frac{15+5\sqrt{21}}{4}$.

Uwaga

Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu doprowadzi rozwiązanie zadania do końca, to przyznajemy **3 punkty**.

Zadanie 3. *(3 pkt)*

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność

$$x(x-1)+y(y-1)\geq xy-1.$$

Dowód (I sposób)

Przekształcamy nierówność $x(x-1)+y(y-1)\geq xy-1$ równoważnie

$$x^2-x+y^2-y\geq xy-1,$$
$$x^2-xy+y^2-x-y+1\geq 0,$$
$$x^2-(y+1)x+\left(y^2-y+1\right)\geq 0.$$

Lewą stronę tej nierówności traktujemy jak trójmian kwadratowy zmiennej x. Współczynnik przy drugiej potędze zmiennej tego trójmianu jest dodatni, a wyróżnik tego trójmianu jest równy

$$\Delta=\left(-(y+1)\right)^2-4\cdot 1\cdot\left(y^2-y+1\right)=y^2+2y+1-4y^2+4y-4=-3y^2+6y-3=$$
$$=-3\left(y^2-2y+1\right)=-3(y-1)^2\leq 0 \text{ dla każdej wartości } y.$$

Oznacza to, że nierówność jest prawdziwa dla każdej wartości x. To kończy dowód.

Schemat oceniania (I sposób)

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej, gdzie jedną ze stron nierówności potraktuje jak trójmian kwadratowy wybranej zmiennej, np.: $x^2-(y+1)x+\left(y^2-y+1\right)\geq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Zdający wyznaczy wyróżnik trójmianu kwadratowego, jako funkcję jednej zmiennej, np.: $\Delta=-3y^2+6y-3$.

Rozwiązanie pełne ....3 pkt

Zdający uzasadni, że wyróżnik trójmianu przyjmuje wartości niedodatnie dla każdej wartości zmiennej y i tym samym uzasadni tezę.

Dowód (II sposób)

Przekształcamy nierówność $x(x-1)+y(y-1)\geq xy-1$ równoważnie

$$x^2-x+y^2-y\geq xy-1,$$
$$x^2-xy+y^2-x-y+1\geq 0.$$

Mnożąc obie strony tej nierówności przez 2 otrzymujemy

$$x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1\geq 0$$
$$\left(x^2-2xy+y^2\right)+\left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-2y+1\right)\geq 0,$$
$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\geq 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż lewa jej strona jest sumą trzech nieujemnych składników. To kończy dowód.

Schemat oceniania (II sposób)

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Zdający zapisze nierówność w postaci równoważnej, w której jedna ze stron będzie sumą składników nieujemnych, np.: $(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 \geq 0$.

Rozwiązanie pełne ....3 pkt

Zdający uzasadni, że nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej *x* i dla każdej liczby rzeczywistej *y*.

Zadanie 4. ***(4 pkt)***

Rozwiąż nierówność $-2\sin 3x \geq 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Sposób rozwiązania

Nierówność możemy zapisać w postaci

$$\sin 3x \leq -\frac{1}{2}.$$

Zatem $3x \in \left\langle -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$ (możemy zapisać $3x \in \left\langle \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$), gdzie k jest liczbą całkowitą.

Stąd $x \in \left\langle -\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \right\rangle$ (możemy zapisać $x \in \left\langle \frac{7\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{11\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \right\rangle$), gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zatem w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ rozwiązaniem tej nierówności jest każda liczba

$$x \in \left\langle \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18} \right\rangle \cup \left\langle \frac{19\pi}{18}, \frac{23\pi}{18} \right\rangle \cup \left\langle \frac{31\pi}{18}, \frac{35\pi}{18} \right\rangle.$$

Schemat oceniania rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zdający zapisze nierówność w postaci: $\sin 3x \leq -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze zbiór rozwiązań nierówność , np. w postaci: $3x \in \left\langle \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right\rangle$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt

Zdający zapisze zbiór rozwiązań nierówność w postaci, np.: $x \in \left\langle -\frac{5\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi, -\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}k\pi \right\rangle$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

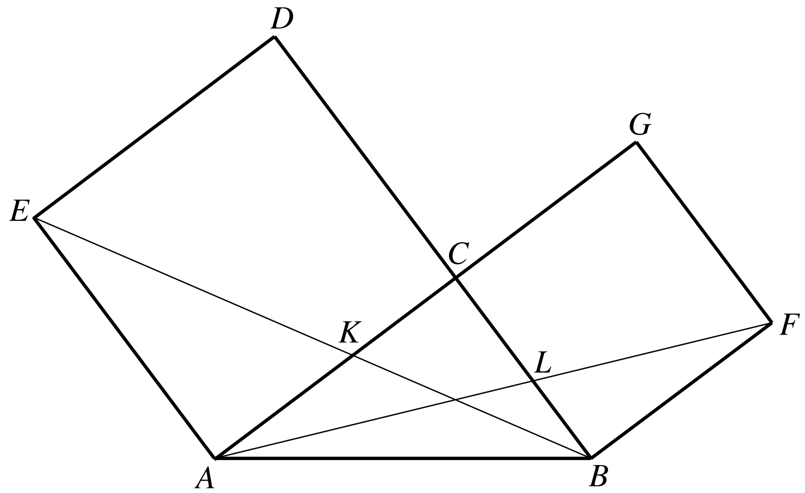
Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zdający zapisze zbiór rozwiązań nierówności w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$x \in \left\langle \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18} \right\rangle \cup \left\langle \frac{19\pi}{18}, \frac{23\pi}{18} \right\rangle \cup \left\langle \frac{31\pi}{18}, \frac{35\pi}{18} \right\rangle$ lub $x \in \langle 70^\circ, 110^\circ \rangle \cup \langle 190^\circ, 230^\circ \rangle \cup \langle 310^\circ, 350^\circ \rangle$.

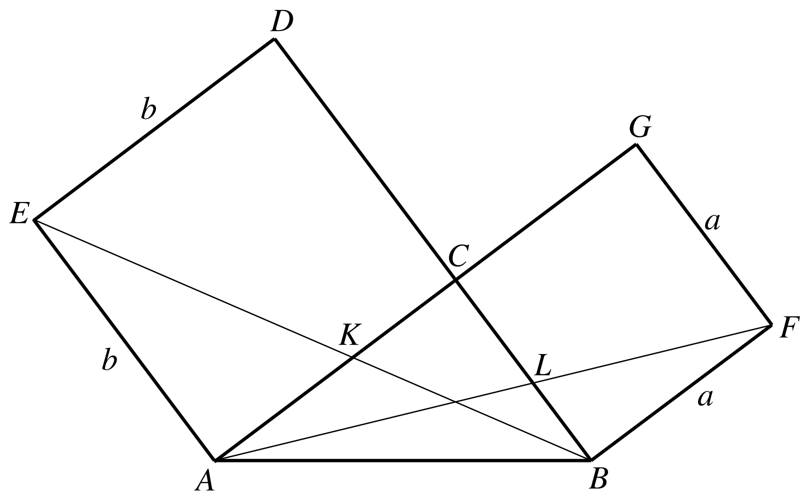
Zadanie 5. *(3 pkt)*

Na przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC zbudowano, na zewnątrz trójkąta, kwadraty $ACDE$ i $BFGC$. Odcinek AF przecina przyprostokątną BC w punkcie L, a odcinek BE przecina przyprostokątną AC w punkcie K (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|KC| = |LC|$.



<u>Dowód (I sposób)</u>

Oznaczmy przez a i b długości przyprostokątnych BC i AB trójkąta ABC.



Ponieważ trójkąty BCK i BDE są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku B, więc są podobne. Analogicznie wnioskujemy, że trójkąty ACL i AGF są podobne. Zatem

$$\frac{|KC|}{|CB|} = \frac{|ED|}{|BD|} \text{ oraz } \frac{|CL|}{|AC|} = \frac{|FG|}{|AG|}, \text{ czyli } \frac{|KC|}{a} = \frac{b}{a+b} \text{ oraz } \frac{|LC|}{b} = \frac{a}{a+b}.$$

Stąd $|KC| = \frac{ab}{a+b}$ oraz $|CL| = \frac{ab}{a+b}$, więc $|KC| = |LC|$, co kończy dowód.

<u>Uwaga</u>

Możemy również wziąć pod uwagę podobieństwo trójkątów BCK i EAK oraz podobieństwo trójkątów ACL i FBL. Otrzymujemy wówczas

$$\frac{|KC|}{|CB|} = \frac{|AK|}{|AE|} \text{ oraz } \frac{|CL|}{|AC|} = \frac{|BL|}{|BF|}, \text{ czyli } \frac{|KC|}{a} = \frac{b-|KC|}{b} \text{ oraz } \frac{|LC|}{b} = \frac{a-|LC|}{a}.$$

Stąd

$$b|KC| = ab - a|KC| \text{ oraz } a|LC| = ab - b|LC|,$$

$$(a+b)|KC| = ab \quad \text{oraz} \quad (a+b)|CL| = ab,$$

$$|KC| = \frac{ab}{a+b} \quad \text{oraz} \quad |LC| = \frac{ab}{a+b},$$

więc $|KC| = |LC|$, co kończy dowód.

<u>Schemat oceniania (I sposób)</u>

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....1 pkt

Zdający
- zapisze, że trójkąty *BCK* i *BDE* są podobne oraz trójkąty *ACL* i *AGF* są podobne

albo
- zapisze, że trójkąty *BCK* i *EAK* są podobne oraz trójkąty *ACL* i *FBL* są podobne.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Zdający zapisze proporcje pozwalające wyznaczyć długości odcinków *KC* i *LC* w zależności od długości przyprostokątnych trójkąta *ABC*, np.:

$$\frac{|KC|}{|CB|} = \frac{|ED|}{|BD|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|LC|}{|AC|} = \frac{|FG|}{|AG|}.$$

Rozwiązanie pełne ....3 pkt

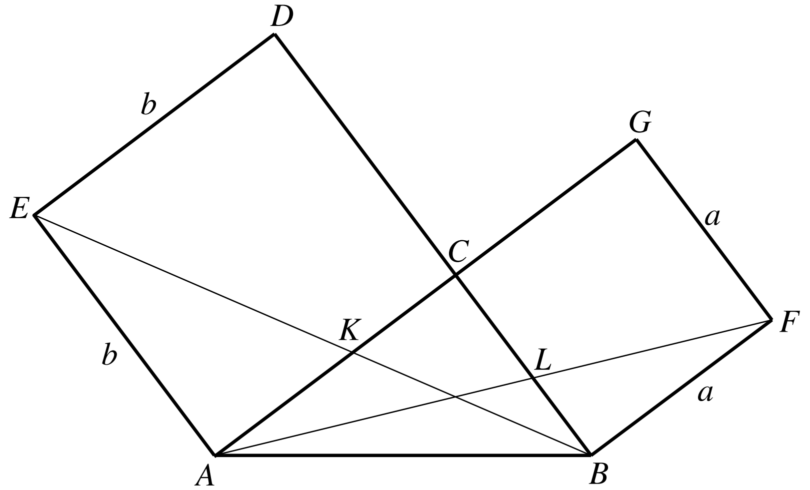
Zdający uzasadni, że $|KC| = |LC| = \dfrac{ab}{a+b}$.

<u>Uwagi</u>

1. Jeżeli zdający wykaże, że trójkąty *BCK* i *BDE* są podobne, wyznaczy $|KC| = \dfrac{ab}{a+b}$, oraz zapisze, że analogicznie, korzystając z podobieństwa trójkątów *ACL* i *AGF*, wyznaczamy $|CL| = \dfrac{ab}{a+b}$ i tym samym uzasadni tezę to otrzymuje **3 punkty.**

<u>Dowód (II sposób)</u>

Oznaczmy przez a i b długości przyprostokątnych *BC* i *AB* trójkąta *ABC*.



Zapisujemy pola trójkątów *EDB* i *AGF* za pomocą a i b oraz $|CK|$ i $|CL|$:

$$P_{EDB} = P_{EDCK} + P_{CKB} \quad \text{oraz} \quad P_{AGF} = P_{GFLC} + P_{CLA},$$

$$\frac{1}{2}b(a+b)=\frac{1}{2}(b+|CK|)b+\frac{1}{2}a\cdot|CK| \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}a(a+b)=\frac{1}{2}(a+|CL|)a+\frac{1}{2}b\cdot|CL|,$$

$$a\cdot b+b^2=b^2+|CK|\cdot b+|CK|\cdot a \quad \text{oraz} \quad a\cdot b+a^2=a^2+|CL|\cdot a+|CL|\cdot b,$$

$$a\cdot b=|CK|(a+b) \quad \text{oraz} \quad a\cdot b=|CL|(a+b),$$

Stąd $|CK|=\frac{ab}{a+b}$ oraz $|CL|=\frac{ab}{a+b}$, więc $|KC|=|LC|$, co kończy dowód.

<u>Schemat oceniania (II sposób)</u>

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....1 pkt

Zdający

- zapisze pole trójkąta EDB za pomocą a i b oraz $|CK|$:

$$\frac{1}{2}b(a+b)=\frac{1}{2}(b+|CK|)b+\frac{1}{2}a\cdot|CK|$$

albo

- zapisze pole trójkąta AGF za pomocą a i b oraz $|CL|$:

$$\frac{1}{2}a(a+b)=\frac{1}{2}(a+|CL|)a+\frac{1}{2}b\cdot|CL|.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Zdający zapisze pola trójkątów EDB i AGF za pomocą a i b oraz $|CK|$ i $|CL|$, np.:

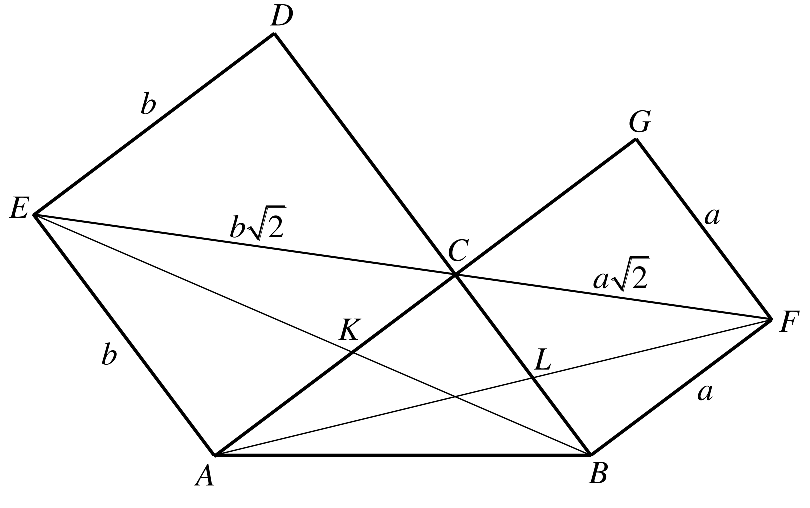
$$\frac{1}{2}b(a+b)=\frac{1}{2}(b+|CK|)b+\frac{1}{2}a\cdot|CK| \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}a(a+b)=\frac{1}{2}(a+|CL|)a+\frac{1}{2}b\cdot|CL|.$$

Rozwiązanie pełne ....3 pkt

Zdający uzasadni, że $|KC|=|LC|=\frac{ab}{a+b}$.

<u>Dowód (III sposób)</u>

Oznaczmy przez a i b długości przyprostokątnych BC i AB trójkąta ABC oraz poprowadźmy przekątne EC i CF kwadratów



Ponieważ kąty ECA i FCB mają po $45°$, a kąt ACB jest prosty, to punkty E, C i F są współliniowe. Zauważmy teraz, że trójkąty KCE i BFE są podobne, bo KC i BF są równoległe, więc kąty KCE i BFE są równe, a kąt przy wierzchołku E jest wspólnym kątem tych trójkątów. Podobnie stwierdzamy, że podobne są też trójkąty CLF i EAF.

Zatem $\frac{|KC|}{|EC|}=\frac{|BF|}{|EF|}$ oraz $\frac{|CL|}{|CF|}=\frac{|EF|}{|AG|}$, czyli $\frac{|KC|}{b\sqrt{2}}=\frac{a}{b\sqrt{2}+a\sqrt{2}}$ oraz $\frac{|CL|}{a\sqrt{2}}=\frac{b}{b\sqrt{2}+a\sqrt{2}}$.

Stąd $|KC|=\frac{ab\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+b\sqrt{2}}=\frac{ab}{a+b}$ oraz $|CL|=\frac{ab\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+b\sqrt{2}}=\frac{ab}{a+b}$, więc $|KC|=|LC|$,

co kończy dowód.

<u>**Schemat oceniania (III sposób)**</u>

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt

Zdający zapisze, że trójkąty KCE i BFE są podobne oraz trójkąty CLF i EAF są podobne.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt

Zdający zapisze proporcje pozwalające wyznaczyć długości odcinków KC i LC w zależności od długości przyprostokątnych trójkąta ABC, np.:

$$\frac{|KC|}{|EC|}=\frac{|BF|}{|EF|} \text{ oraz } \frac{|CL|}{|CF|}=\frac{|EF|}{|AG|}.$$

Rozwiązanie pełne .... 3 pkt

Zdający uzasadni, że. $|KC|=|LC|=\frac{ab\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+b\sqrt{2}}=\frac{ab}{a+b}$

Zadanie 6. *(6 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $x^2+(2m-5)x+2m+3=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $(x_1+x_2)^2 \ge x_1^2 \cdot x_2^2 \ge x_1^2+x_2^2$.

Rozwiązanie

Równanie ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste tylko wtedy, gdy $\Delta > 0$, a więc gdy

$$(2m-5)^2-4\cdot(2m+3)>0,$$
$$4m^2-20m+25-8m-12>0,$$
$$4m^2-28m+13>0,$$
$$\Delta=28^2-4\cdot4\cdot13=576=24^2,$$
$$m_1=\frac{28-24}{8}=\frac{1}{2},\ m_1=\frac{28+24}{8}=\frac{13}{2}$$
$$4\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m-\frac{13}{2}\right)>0,$$
$$m<\frac{1}{2} \text{ lub } m>\frac{13}{2},$$

stąd $m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{13}{2},\infty\right)$.

Uwaga

Nierówność_$4m^2-28m+13>0$ możemy rozwiązać poprzez grupowanie wyrazów:

$$4m^2-28m+13>0,$$
$$4m^2-2m-26m+13>0,$$
$$2m(2m-1)-13(2m-1)>0,$$
$$(2m-13)(2m-1)>0,$$
$$m<\frac{1}{2} \text{ lub } m>\frac{13}{2},$$

Nierówność $(x_1+x_2)^2 \ge x_1^2 \cdot x_2^2 \ge x_1^2+x_2^2$ możemy zapisać w postaci

$$(x_1+x_2)^2 \ge (x_1x_2)^2 \ge (x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

Wykorzystując wzory Viète'a, zapisujemy tę nierówność jako nierówność z niewiadomą *m*

$$\left(-\frac{2m-5}{1}\right)^2 \ge \left(\frac{2m+3}{1}\right)^2 \ge \left(-\frac{2m-5}{1}\right)^2-2\cdot\frac{2m+3}{1},$$
$$(2m-5)^2 \ge (2m+3)^2 \ge (2m-5)^2-4m-6.$$

Rozwiązujemy pierwszą nierówność

$$(2m-5)^2 \ge (2m+3)^2,$$
$$4m^2-20m+25 \ge 4m^2+12m+9,$$
$$16 \ge 32m,$$
$$m \le \frac{1}{2},$$

stąd $m\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right\rangle$.

Rozwiązujemy drugą z nierówności

$$(2m+3)^2 \geq (2m-5)^2 - 4m - 6,$$
$$4m^2 + 12m + 9 \geq 4m^2 - 20m + 25 - 4m - 6,$$
$$36m \geq 10,$$
$$m \geq \frac{5}{18},$$

stąd $m \in \left\langle \frac{5}{18}, \infty \right)$.

Nierówność $(2m-5)^2 \geq (2m+3)^2 \geq (2m-5)^2 - 4m - 6$ jest spełniona dla

$m \in \left\langle \frac{5}{18}, \frac{1}{2} \right\rangle$.

Po uwzględnieniu $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{13}{2}, \infty\right)$ otrzymujemy

$$m \in \left\langle \frac{5}{18}, \frac{1}{2} \right).$$

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

1 punkt przyznajemy za zapisanie i rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{13}{2}, \infty\right)$.

<u>Uwaga:</u> Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

4 punkty przyznajemy za rozwiązanie obu nierówności $(x_1 + x_2)^2 \geq {x_1}^2 \cdot {x_2}^2 \geq x_1^2 + x_2^2$.

Przy czym w tej części:

- **1 punkt** zdający otrzymuje za skorzystanie z obu wzorów Viète'a (z każdego poprawnie, co najmniej jeden raz) i podstawienie $x_1 + x_2 = 2m - 5$ oraz $x_1 \cdot x_2 = 2m + 3$.
- **1 punkt** przyznajemy za zapisanie wyrażenia $x_1^2 + x_2^2$ za pomocą parametru *m*: $(2m-5)^2 - 2(2m+3)$.
- **po 1 punkcie przyznajemy za zapisanie i rozwiązanie każdej z obu nierówności (po** uproszczeniu, nierówności liniowych), np. $16 \geq 32m$: $m \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$ oraz $36m \geq 10 : m \in \left\langle \frac{5}{18}, \infty \right)$.

Trzeci etap:

1 punkt przyznajemy za znalezienie części wspólnej rozwiązań (części wspólnej rozwiązań trzech nierówności): $m \in \left\langle \frac{5}{18}, \frac{1}{2} \right)$.

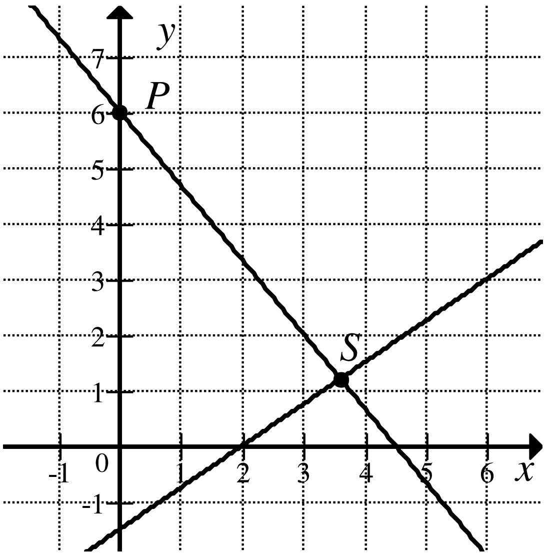
<u>Uwaga</u>

Za ostatni etap **1 punkt** przyznajemy jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II albo, gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże, co najmniej jedną nierówność z etapu II.

Zadanie 7. *(6 pkt)*

Odcinek *AB* o długości 4 jest zawarty w prostej o równaniu $y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$,. Symetralna odcinka *AB* przecina oś *Oy* w punkcie $P=(0,6)$. Oblicz współrzędne końców odcinka *AB*.

<u>I sposób rozwiązania</u>



Symetralna odcinka *AB* to prosta przechodząca przez punkt $P=(0,6)$ i prostopadła do prostej *AB*, więc jej równanie ma postać

$$y=-\frac{4}{3}x+6.$$

Współrzędne środka *S* odcinka *AB* obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{4}{3}x+6 \end{cases}.$$

Stąd

$$\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}=-\frac{4}{3}x+6,$$

$$\frac{25}{12}x=\frac{15}{2},$$

$$x=\frac{18}{5}.$$

Zatem $y=-\frac{4}{3}\cdot\frac{18}{5}+6=\frac{6}{5}$, czyli $S=\left(\frac{18}{5},\frac{6}{5}\right)$.

Każdy z punktów *A* i *B* leży na prostej *AB*, więc $A=\left(x_A,\frac{3}{4}x_A-\frac{3}{2}\right)$, $B=\left(x_B,\frac{3}{4}x_B-\frac{3}{2}\right)$. Punkt *S* jest środkiem odcinka *AB* o długości 4, więc $|AS|=|BS|=2$.

$$|AS|=\sqrt{\left(x_A-\frac{18}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{4}x_A-\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^2}=2,$$

$$\left(x_A-\frac{18}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{4}x_A-\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^2=4,$$

$$x_A^2-\frac{36}{5}x_A+\frac{324}{25}+\frac{9}{16}x_A^2-\frac{81}{20}x_A+\frac{729}{100}-4=0,$$

$$\frac{25}{16}x_A^2-\frac{45}{4}x_A+\frac{65}{4}=0,$$

$$5x_A^2-36x_A+52=0,$$

$$\Delta=(-36)^2-4\cdot5\cdot52=256,\ \sqrt{\Delta}=16,$$

$$x_A=\frac{36-16}{10}=2 \text{ lub } x_A=\frac{36+16}{10}=\frac{26}{5}.$$

Dla $x_A=2$ otrzymujemy punkt o współrzędnych $A=\left(2,\frac{3}{4}\cdot2-\frac{3}{2}\right)=(2,0)$, natomiast dla $x_A=\frac{26}{5}$ punkt $A=\left(\frac{26}{5},\frac{3}{4}\cdot\frac{26}{5}-\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$.

Dla $A=(2,0)$, to $B=\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$, a gdy $A=\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$, to $B=(2,0)$

Odpowiedź: Końce odcinka *AB* to punkty o współrzędnych: $(2,0)$, $\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Symetralna odcinka AB to prosta przechodząca przez punkt $P=(0,6)$ i prostopadła do prostej AB, więc jej równanie ma postać

$$y=-\frac{4}{3}x+6.$$

Współrzędne środka *S* odcinka *AB* obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{4}{3}x+6 \end{cases}.$$

Stąd

$$\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}=-\frac{4}{3}x+6,$$

$$\frac{25}{12}x=\frac{15}{2},$$

$$x=\frac{18}{5}.$$

Zatem $y=-\frac{4}{3}\cdot\frac{18}{5}+6=\frac{6}{5}$, czyli $S=\left(\frac{18}{5},\frac{6}{5}\right)$.

Każdy z punktów A i B leży na prostej AB, więc są to punkty przecięcia tej prostej z okręgiem o środku w punkcie $S=\left(\frac{18}{5},\frac{6}{5}\right)$ i promieniu 2 ($r=|AS|=|BS|=2$).

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2} \\ \left(x-\frac{18}{5}\right)^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2=4 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2} \\ \left(x-\frac{18}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}-\frac{6}{5}\right)^2=4 \end{cases}.$$

Stąd
$$\left(x-\frac{18}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{27}{10}\right)^2=4,$$

$$x^2-\frac{36}{5}x+\frac{324}{25}+\frac{9}{16}x^2-\frac{81}{20}x+\frac{729}{100}-4=0,$$

$$\frac{25}{16}x^2-\frac{45}{4}x+\frac{65}{4}=0,$$

$$5x^2-36x+52=0,$$

$$\Delta=(-36)^2-4\cdot 5\cdot 52=256,\ \sqrt{\Delta}=16,$$

$$x=\frac{36-16}{10}=2 \text{ lub } x=\frac{36+16}{10}=\frac{26}{5}.$$

Jeden koniec odcinka AB ma współrzędne $(2,0)$, natomiast drugi $\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$.

Odpowiedź: Końce odcinka AB to punkty o współrzędnych: $(2,0)$, $\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$.

<u>**Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

Zdający wyznaczy równanie symetralnej odcinka AB: $y=-\frac{4}{3}x+6$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający

- obliczy współrzędne środka S odcinka AB: $S=\left(\frac{18}{5},\frac{6}{5}\right)$

albo

- zapisze współrzędne punktu A lub B w zależności od jednej zmiennej, np.: $A=\left(x_A,\frac{3}{4}x_A-\frac{3}{2}\right)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 pkt

Zdający zapisze równanie kwadratowego (nawet w postaci nieuporządkowanej) z jedną niewiadomą, np.: $\left(x_A-\frac{18}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{4}x_A-\frac{27}{10}\right)^2=4$.

<u>**Uwaga**</u>

Jeżeli zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć współrzędne punktów A i B,

to otrzymuje **3 punkty**, np.: $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2} \\ \left(x-\frac{18}{5}\right)^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2=4 \end{cases}$ lub $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2} \\ \sqrt{\left(x-\frac{18}{5}\right)^2+\left(y-\frac{6}{5}\right)^2}=2 \end{cases}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..5 pkt

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą w postaci uporządkowanej i na tym zakończy, np.:
  $\frac{25}{16}x_A{}^2-\frac{45}{4}x_A+\frac{65}{4}=0$

albo

- obliczy współrzędne punktów A i B z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Zdający obliczy współrzędne końców odcinka AB: $(2,0)$, $\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$.

<u>**III sposób rozwiązania**</u>

Symetralna odcinka AB to prosta przechodząca przez punkt $P=(0,6)$ i prostopadła do prostej AB, więc jej równanie ma postać

$$y=-\frac{4}{3}x+6.$$

Współrzędne środka S odcinka AB obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2} \\ y=-\frac{4}{3}x+6 \end{cases}.$$

Stąd

$$\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}=-\frac{4}{3}x+6,$$
$$\frac{25}{12}x=\frac{15}{2},$$
$$x=\frac{18}{5}.$$

Zatem $y=-\frac{4}{3}\cdot\frac{18}{5}+6=\frac{6}{5}$, czyli $S=\left(\frac{18}{5},\frac{6}{5}\right)$.

Każdy z punktów A i B leży na prostej AB, więc np. $A=\left(x,\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)$.

Punkt S jest środkiem odcinka AB o długości 4, więc odległość tego punktu od symetralnej odcinka $4x+3y-18=0$ jest równa 2, więc $d(A,y)=2$.

$$\frac{\left|4x+3\left(\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}\right)-18\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2,$$

$$\left|4x+\frac{9}{4}x-\frac{9}{2}-18\right|=10,$$

$$\left|\frac{25}{4}x-\frac{45}{2}\right|=10,$$

$$|5x-18|=8,$$

$$5x-18=-8 \text{ lub } 5x-18=8,$$

$$x=2 \text{ lub } x=\frac{26}{5}.$$

Dla $x_A=2$ otrzymujemy punkt o współrzędnych $A=\left(2,\frac{3}{4}\cdot 2-\frac{3}{2}\right)=(2,0)$, natomiast dla $x_A=\frac{26}{5}$ punkt $A=\left(\frac{26}{5},\frac{3}{4}\cdot\frac{26}{5}-\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$.

Dla $A=(2,0)$, to $B=\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$, a gdy $A=\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$, to $B=(2,0)$.

Odpowiedź: Końce odcinka *AB* to punkty o współrzędnych: $(2,0)$, $\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zdający wyznaczy równanie symetralnej odcinka *AB*: $y=-\frac{4}{3}x+6$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający

- obliczy współrzędne środka *S* odcinka *AB*: $S=\left(\frac{18}{5},\frac{6}{5}\right)$

albo

- zapisze współrzędne punktu *A* lub *B* w zależności od jednej zmiennej, np.: $A=\left(x_A,\frac{3}{4}x_A-\frac{3}{2}\right)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....4 pkt

Zdający równanie z wartością bezwzględną z jedną niewiadomą, np.: $|5x-18|=8$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć współrzędne punktów *A* i *B*, to otrzymuje **3 punkty**, np.: $\begin{cases} y_A=\frac{3}{4}x_A-\frac{3}{2} \\ \frac{|4x_A+3y_A-18|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2 \end{cases}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..5 pkt

Zdający

- zapisze alternatywę równań pierwszego stopnia i na tym zakończy, np.: $5x-18=-8$ lub $5x-18=8$

albo

- obliczy współrzędne punktów A i B z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Zdający obliczy współrzędne końców odcinka AB: $\left(2,0\right)$, $\left(\frac{26}{5},\frac{12}{5}\right)$.

Zadanie 8. *(6 pkt)*

Trzy liczby są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, którego iloraz jest różny od 1. Jeżeli weźmiemy kolejno drugą z nich, pierwszą i trzecią, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Jeżeli pierwszy wyraz tego ciągu arytmetycznego zmniejszymy o 7, drugi pozostawimy bez zmian, a trzeci zwiększymy o 3, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz te liczby.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Niech a, b i c oznaczają odpowiednio pierwszą, drugą i trzecią z szukanych liczb. Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie

$$b^2 = ac.$$

Ciąg (b,a,c) jest arytmetyczny, więc z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a = \frac{b+c}{2}.$$

Ciąg $(b-7,\ a,\ c+3)$ jest geometryczny, więc z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie

$$a^2 = (b-7)(c+3).$$

Pozostaje rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} b^2 = ac \\ a = \dfrac{b+c}{2} \\ a^2 = (b-7)(c+3) \end{cases}.$$

Drugie równanie przekształcamy równoważnie i otrzymujemy

$$b+c = 2a,$$
$$b = 2a-c.$$

Zatem pierwsze i trzecie równanie możemy zapisać w postaci

$$(2a-c)^2 = ac \quad \text{oraz} \quad a^2 = (2a-c-7)(c+3),$$

Pierwsze z tych równań zapisujemy w postaci

$$4a^2 - 4ac + c^2 - ac = 0,$$
$$4a(a-c) - c(a-c) = 0,$$
$$(4a-c)(a-c) = 0.$$

Stąd wynika, że $c = a$ lub $c = 4a$. Ponieważ liczby a, b i c są różne, więc $c = 4a$ i $a \neq 0$. Wówczas równanie $a^2 = (2a-c-7)(c+3)$ przyjmuje postać

$$a^2 = (2a-4a-7)(4a+3),$$
$$a^2 = (-2a-7)(4a+3),$$
$$a^2 = -8a^2 - 34a - 21,$$
$$9a^2 + 34a + 21 = 0,$$
$$\Delta = 34^2 - 4\cdot 9\cdot 21 = 400,\ \sqrt{\Delta} = 20,$$
$$a = \frac{-34-20}{2\cdot 9} = -\frac{54}{18} = -3 \text{ lub } a = \frac{-34+20}{2\cdot 9} = -\frac{14}{18} = -\frac{7}{9}.$$

Gdy $a = -3$, to wtedy $c = 4a = -12$ oraz $b = 2a - c = -2a = 6$. Wtedy $(a,b,c) = (-3,6,-12)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie -2, $(b,a,c) = (6,-3,-12)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy -9, a $(b-7,a,c+3)=(-1,-3,-9)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 3.

Gdy $a=-\frac{7}{9}$, to wtedy $c=4a=-\frac{28}{9}$ oraz $b=2a-c=-2a=\frac{14}{9}$. Wtedy $(a,b,c)=\left(-\frac{7}{9},\frac{14}{9},-\frac{28}{9}\right)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie -2, $(b,a,c)=\left(\frac{14}{9},-\frac{7}{9},-\frac{28}{9}\right)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $-\frac{7}{3}$, a $(b-7,a,c+3)=\left(-\frac{49}{9},-\frac{7}{9},-\frac{1}{9}\right)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{7}$.

Odpowiedź: Są dwie trójki takich liczb: $(-3,6,-12)$, $\left(-\frac{7}{9},\frac{14}{9},-\frac{28}{9}\right)$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zdający
- zapisze równanie wynikające z własności ciągu geometrycznego (a,b,c), np.: $b^2=ac$

albo
- zapisze równanie wynikające z własności ciągu arytmetycznego (b,a,c), np.: $a=\frac{b+c}{2}$

albo
- zapisze równanie wynikające z własności ciągu geometrycznego $(b-7,a,c+3)$, np.: $a^2=(b-7)(c+3)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć a, b i c, np.:
$b^2=ac$ i $a=\frac{b+c}{2}$ i $a^2=(b-7)(c+3)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....4 pkt

Zdający zapisze równanie kwadratowego (nawet w postaci nieuporządkowanej) z jedną niewiadomą, np.: $a^2=(2a-4a-7)(4a+3)$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający uzależni jedną spośród liczb a, b, c od jednej z pozostałych liczb i na tym poprzestanie, to otrzymuje **3 punkty**, np. zapisze: $c=4a$. Na tym etapie rozwiązania nie wymagamy, żeby zdający odrzucił przypadek $c=a$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..5 pkt

Zdający
- zapisze równanie z jedną niewiadomą w postaci uporządkowanej i na tym zakończy, np.: $9a^2+34a+21=0$

albo
- rozwiąże zadanie do końca i nie odrzuci przypadku ciągu stałego

albo

- rozwiąże zadanie do końca i odrzuci przypadek ciągu stałego, ale w trakcie rozwiązywania zadania popełni błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Zdający wyznaczy dwie trójki liczb: $(-3,6,-12)$, $\left(-\frac{7}{9},\frac{14}{9},-\frac{28}{9}\right)$.

II sposób rozwiązania

Niech a, b i c oznaczają odpowiednio pierwszą, drugą i trzecią z szukanych liczb oraz niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a,b,c). Ze wzoru na n-ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymujemy $b=aq$ i $c=aq^2$

$$b^2=ac.$$

Ciąg $(b,a,c)=(aq,q,aq^2)$ jest arytmetyczny, więc z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$a=\frac{aq+aq^2}{2},$$
$$2a=aq+aq^2,$$
$$aq^2+aq-2a=0.$$

Gdyby $a=0$, to wtedy $b=c=0$, co jest niemożliwe, gdyż liczy a, b i c są różne. Zatem $a\neq 0$. Możemy więc podzielić obie strony równania $aq^2+aq-2a=0$ przez a i otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą q

$$q^2+q-2=0,$$
$$(q-1)(q+2)=0.$$

Stąd $q=1$ lub $q=-2$. Pierwsze z tych rozwiązań odrzucamy, gdyż wtedy mielibyśmy $b=aq=a$ i $c=aq^2=a$, a to jest niemożliwe. Zatem $q=-2$.

Ciąg $(b-7,\ a,\ c+3)=(aq-7,a,aq^2+3)$ jest geometryczny, więc z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie

$$a^2=(aq-7)(aq^2+3).$$

Podstawiając $q=-2$ otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą

$$a^2=(-2a-7)(4a+3),$$
$$a^2=-8a^2-34a-21,$$
$$9a^2+34a+21=0,$$
$$\Delta=34^2-4\cdot 9\cdot 21=400,\ \sqrt{\Delta}=20,$$
$$a=\frac{-34-20}{2\cdot 9}=-\frac{54}{18}=-3 \text{ lub } a=\frac{-34+20}{2\cdot 9}=-\frac{14}{18}=-\frac{7}{9}.$$

Gdy $a=-3$, to wtedy $b=aq=-2\cdot(-3)=6$ oraz $c=aq^2=-3\cdot(-2)^2=-12$. Wtedy $(a,b,c)=(-3,6,-12)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie -2, $(b,a,c)=(6,-3,-12)$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy -9, a $(b-7,a,c+3)=(-1,-3,-9)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 3.

Gdy $a=-\frac{7}{9}$, to wtedy $b=aq=-\frac{7}{9}\cdot(-2)=\frac{14}{9}$ oraz $c=aq^2=-\frac{7}{9}\cdot(-2)^2=-\frac{28}{9}$. Wtedy $(a,b,c)=\left(-\frac{7}{9},\frac{14}{9},-\frac{28}{9}\right)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie -2, $(b,a,c)=\left(\frac{14}{9},-\frac{7}{9},-\frac{28}{9}\right)$

jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $-\frac{7}{3}$, a $(b-7,a,c+3)=\left(-\frac{49}{9},-\frac{7}{9},-\frac{1}{9}\right)$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $\frac{1}{7}$.

Odpowiedź: Są dwie trójki takich liczb: $(-3,6,-12)$, $\left(-\frac{7}{9},\frac{14}{9},-\frac{28}{9}\right)$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zdający

- zapisze dwie spośród liczb a, b i c w zależności od jednej z nich i parametru wybranego ciągu, np. w zależności od a i ilorazu q ciągu (a,b,c): $b=aq$, $c=aq^2$

albo

- zapisze równanie wynikające z własności ciągu arytmetycznego (b,a,c), np.: $a=\frac{b+c}{2}$

albo

- zapisze równanie wynikające z własności ciągu geometrycznego $(b-7,a,c+3)$, np.: $a^2=(b-7)(c+3)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze układ równań z wprowadzonymi niewiadomymi pozwalający obliczyć a, b i c, np.: $a=\frac{aq+aq^2}{2}$ i $a^2=(aq-7)(aq^2+3)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....4 pkt

Zdający zapisze równanie kwadratowego (nawet w postaci nieuporządkowanej) z jedną niewiadomą a, b lub c, np.: $a^2=(-2a-7)(4a+3)$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający obliczy iloraz q i na tym poprzestanie, to otrzymuje **3 punkty**. Na tym etapie rozwiązania nie wymagamy, żeby zdający odrzucił przypadek $q=1$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....5 pkt

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą w postaci uporządkowanej i na tym zakończy, np.: $9a^2+34a+21=0$

albo

- rozwiąże zadanie do końca i nie odrzuci przypadku ciągu stałego

albo

- rozwiąże zadanie do końca i odrzuci przypadek ciągu stałego, ale w trakcie rozwiązywania zadania popełni błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Zdający wyznaczy dwie trójki liczb: $(-3,6,-12)$, $\left(-\frac{7}{9},\frac{14}{9},-\frac{28}{9}\right)$.

Zadanie 9. *(5 pkt)*

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=6x^3+(m+4)x^2-2x-1$ przez dwumian $x-m$ jest równa 8. Oblicz wartość m oraz pierwiastki tego wielomianu.

Rozwiązanie

Z twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian liniowy wynika, że $W(m)=8$.
Otrzymujemy równanie

$$6m^3+(m+4)m^2-2m-1=8,$$
$$7m^3+4m^2-2m-9=0.$$

Ponieważ liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $P(m)=7m^3+4m^2-2m-9$, gdyż $P(1)=7\cdot1^3+4\cdot1^2-2\cdot1-9=0$, więc wielomian ten jest podzielny przez dwumian $m-1$.
Wykorzystując schemat Hornera otrzymujemy

	7	4	–2	–9
1	7	11	9	0

Zatem $P(m)=(m-1)(7m^2+11m+9)$. Wyróżnik trójmianu $7m^2+11m+9$ jest ujemny, więc liczba 1 jest jedynym rzeczywistym rozwiązaniem równania $W(m)=8$. Dla $m=1$ wielomian $W(x)$ ma postać $W(x)=6x^3+5x^2-2x-1$. Liczba -1 jest pierwiastkiem tego wielomianu, gdyż $W(-1)=6\cdot(-1)^3+5\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)-1=-6+5+2-1=0$, więc wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x+1$.
Wykorzystując schemat Hornera, otrzymujemy

	6	5	–2	–1
–1	6	–1	–1	0

Zatem $W(x)=(x+1)(6x^2-x-1)=(x+1)(2x-1)(3x+1)$. Wobec tego pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby: $-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{2}$.

Odpowiedź. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=6x^3+(m+4)x^2-2x-1$ przez dwumian $x-m$ jest równa 8 tylko dla $m=1$. Wówczas wielomian ten ma trzy pierwiastki: $-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt
Zdający
- zapisze równanie z niewiadomą m, np. $6m^3+(m+4)m^2-2m-1=8$

albo
- podzieli wielomian $W(x)$ przez dwumian $x-m$ i otrzyma resztę $6m^3+(m+4)m^2-2m-1$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci uporządkowanej oraz

- sprawdzi, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $P(m)=7m^3+4m^2-2m-9$

albo

- dzieli wielomian $P(m)=7m^3+4m^2-2m-9$ przez dwumian $m-1$ (nawet z błędami) .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający rozwiąże równanie $7m^3+4m^2-2m-9=0$: $m=1$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Zdający

- sprawdzi, że liczba -1 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=6x^3+5x^2-2x-1$, podzieli wielomian W przez dwumian $x+1$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- sprawdzi, że liczba $\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=6x^3+5x^2-2x-1$, podzieli wielomian W przez dwumian $x-\frac{1}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy
- albo
- sprawdzi, że liczba $-\frac{1}{3}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)=6x^3+5x^2-2x-1$, podzieli wielomian W przez dwumian $x+\frac{1}{3}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zdający wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu W: $-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

<u>Uwaga</u>

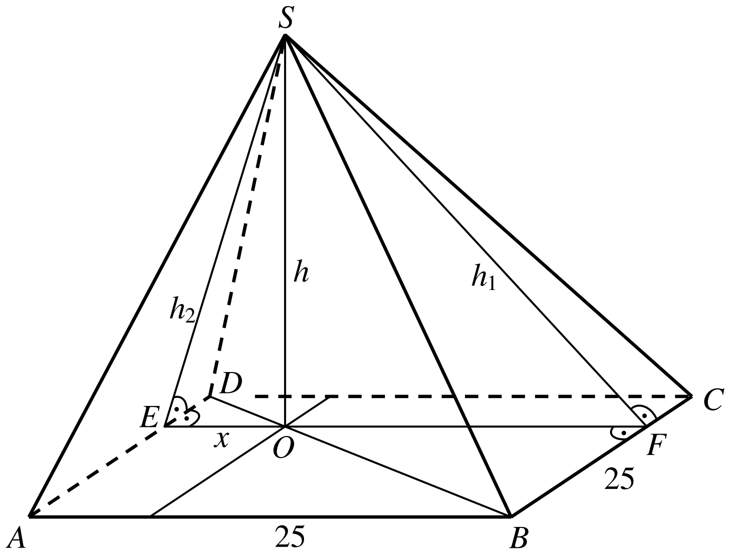
Jeżeli zdający sprawdzi, że każda z liczb: -1, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ to pierwiastek wielomianu W i zapisze, że są to wszystkie pierwiastki tego wielomianu, to otrzymuje **5 punktów**.

Zadanie 10. *(5 pkt)*

Podstawą ostrosłupa jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 25. Ściany boczne ABS i BCS mają takie same pola, każde równe 250. Ściany boczne ADS i CDS też mają jednakowe pola, każde równe 187,5. Krawędzie boczne AS i CS mają równe długości. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Ponieważ krawędzie boczne AS i CS mają równe długości, więc spodek O wysokości SO ostrosłupa leży na prostej BD.
Pole ściany bocznej BCS jest równe 250, a pole ściany 187,5, więc

$$\frac{1}{2}\cdot 25\cdot h_1 = 250 \text{ oraz } \frac{1}{2}\cdot 25\cdot h_2 = 187{,}5.$$

Stąd otrzymujemy

$$h_1 = 20 \text{ oraz } h_2 = 15.$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkątach EOS i FOS, skąd otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 15^2 \\ (25-x)^2 + h^2 = 20^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 15^2 \\ 25^2 - 50x + x^2 + h^2 = 20^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 15^2 \\ 25^2 - 50x + 15^2 = 20^2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 15^2 \\ 450 = 50x \end{cases},$$

$$\begin{cases} 9^2 + h^2 = 15^2 \\ x = 9 \end{cases}.$$

Stąd $h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$.

Objętość ostrosłupa jest równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot 25^2 \cdot 12 = 2500.$$

Odpowiedź. Objętość ostrosłupa jest równa 2500.

Uwaga

Wysokość ostrosłupa możemy obliczyć innymi sposobami, np.:

1. Zauważmy, że trójkąt *EFS* jest prostokątny, gdyż

$$|ES|^2 + |FS|^2 = 15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625 = 25^2 = |EF|^2.$$

Trójkąty *EOS* i *ESF* są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *E*, więc trzecie kąty tych trójkątów również są równe. Wobec tego trójkąty te są podobne.

Stąd

$$\frac{|SO|}{|ES|} = \frac{|FS|}{|EF|}, \text{ czyli } \frac{h}{20} = \frac{15}{25}.$$

Wysokość ostrosłupa jest równa

$$h = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12.$$

2. Możemy zastosować twierdzenie cosinusów w trójkątach *EFS* i funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie *FOS*, skąd otrzymujemy:

$$|ES|^2 = |EF|^2 + |FS|^2 - 2|EF| \cdot |FS| \cdot \cos\sphericalangle EFS$$

$$15^2 = 25^2 + 20^2 - 2 \cdot 25 \cdot 20 \cdot \cos\sphericalangle EFS$$

$$225 = 625 + 400 - 1000 \cdot \cos\sphericalangle EFS$$

$$\cos\sphericalangle EFS = \frac{1025 - 225}{1000} = \frac{4}{5}.$$

Obliczamy $\sin\sphericalangle EFS = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$ oraz $\sin\sphericalangle EFS = \frac{h}{|FS|}$.

Stąd

$$\frac{3}{5} = \frac{h}{20}, \ h = 12.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zdający

- obliczy wysokość jednej ze ścian bocznych ostrosłupa opuszczoną z wierzchołka *S*:
  $h_1 = 20$, $h_2 = 15$

albo

- zauważy, że spodek *O* wysokości *SO* ostrosłupa leży na przekątnej *BD* jego podstawy (zdający nie musi tego pisać, wystarczy, że wynika to ze sporządzonego rysunku lub obliczeń zdającego).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć wysokość ostrosłupa, np.:
  $$\begin{cases} x^2 + h^2 = 15^2 \\ (25 - x)^2 + h^2 = 20^2 \end{cases}$$

albo

- zauważy, że trójkąt *ESF* jest prostokątny, trójkąty *EOS* i *ESF* są podobne (lub jakakolwiek para trójkątów spośród *EOS*, *FOS*, *ESF*) i zapisze równanie pozwalające obliczyć wysokość ostrosłupa: $\frac{h}{20}=\frac{15}{25}$

albo

- zauważy, że trójkąt *ESF* jest prostokątny i zapisze pozwalające obliczyć wysokość ostrosłupa równanie wynikające np. z policzenia pola tego trójkąta na dwa sposoby: $\frac{1}{2}\cdot 25\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 20$

albo

- zapisze zależności pozwalające obliczyć wysokość ostrosłupa, np.: $\sin\sphericalangle EFS=\frac{3}{5}$ oraz $\sin\sphericalangle EFS=\frac{h}{|FS|}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $h=12$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

Zdający

- obliczy objętość z błędem rachunkowym

albo

- pominie współczynnik $\frac{1}{3}$ we wzorze na objętość ostrosłupa i otrzyma objętość ostrosłupa równą 7500.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V=2500$.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający obliczy, np. $\cos\sphericalangle EFS=\frac{4}{5}$, odczyta miarę kąta z tablic i wykona obliczenia na przybliżeniach, to otrzymuje o **1 punkt** mniej za rozwiązanie.

Zadanie 11 *(4 pkt)*

W urnie jest dziesięć kul: 4 białe, 3 czarne, 2 zielone i 1 niebieska. Losujemy jednocześnie trzy kule z urny. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wśród wylosowanych kul nie ma kul w tym samym kolorze. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

<u>Rozwiązanie (I sposób)</u>

Przyjmijmy, że zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trzyelementowe podzbiory $\{x, y, z\}$ zbioru $\{b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, z_1, z_2, n\}$. Mamy wówczas do czynienia z modelem klasycznym. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest wówczas równa

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120 .$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że każda z wylosowanych kul będzie innego koloru niż pozostałe. Ponieważ losujemy trzy kule, a kolorów kul są cztery, więc mamy $\binom{4}{3} = 4$ możliwości zestawienia kolorów:

- biała, czarna, zielona
- biała, czarna, niebieska
- biała, zielona, niebieska
- czarna, zielona, niebieska

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest zatem równa

$$|A| = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 50 .$$

Prawdopodobieństwa zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12} .$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że każda z wylosowanych kul będzie innego koloru niż pozostałe jest równe $\frac{5}{12}$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Gdy zdający

- zapisze, że $|\Omega| = \binom{10}{3}$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie

albo

- wskaże poprawnie cztery przypadki, w których każda z wylosowanych kul będzie innego koloru niż pozostałe.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A:
$|A| = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 50$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zdający obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych i liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjający zdarzeniu A: $|\Omega| = 120$, że $|A| = 50$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Uwaga
Jeżeli zdający wypisze bezbłędnie wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, ale błędnie obliczy ich liczbę (np. opuści przy zliczaniu jedną z możliwości) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A)=\frac{5}{12}$.

Uwagi
1. Zdający nie musi w jawny sposób napisać $|\Omega|=120$, wystarczy, że przy obliczaniu prawdopodobieństwa dzieli przez 120.
2. Jeżeli zdający przy wypisywaniu zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A poda co najmniej jeden z podzbiorów, w którym znajdują się kule w tym samym kolorze, np. $\{b_1,b_2,c_1\}$, to może za całe rozwiązanie otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
3. Akceptujemy sytuację, w której zdający zapisze, że zbiór zdarzeń elementarnych ma postać
$\Omega=\{\{b,b,b\},\{b,b,c\},\{b,b,z\},\{b,b,n\},\{b,c,c\},\{b,c,z\},\{b,c,n\},\{b,z,c\},$
$\{b,z,z\}\{b,z,n\},\{c,c,c\},\{c,c,z\},\{c,c,n\},\{c,z,z\},\{c,z,n\},\{z,z,n\}\}$
oraz że zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:
$\{b,c,z\},\{b,c,n\},\{b,z,n\},\{c,z,n\}$, o ile z innych zapisów zdającego wynika, że rozróżnia kule tego samego koloru, np. gdy zapisze: $|\Omega|=120$ lub $|A|=50$. Jeżeli jednak inne zapisy wskazują na to, że zdający nie rozróżnia kul tych samych kolorów, np. zapisze $|\Omega|=16$ lub $|A|=4$, a następnie stosuje klasyczną definicję prawdopodobieństwa, to otrzymuje **0 punktów**.

Rozwiązanie (II sposób)
Przyjmijmy, że zdarzeniami elementarnymi są wszystkie trzywyrazowe różnowartościowe ciągi (x,y,z), gdzie $x,y,z\in\{b_1,b_2,b_3,b_4,c_1,c_2,c_3,z_1,z_2,n\}$. Mamy wówczas do czynienia z modelem klasycznym.
Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest wówczas równa

$$|\Omega|=\frac{10!}{7!}=720.$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że każda z wylosowanych kul będzie innego koloru niż pozostałe.
Rozważmy najpierw wszystkie możliwe zestawienia trzech różnych kolorów kul. Możemy więc mieć po jednej kuli
- białej, czarnej, zielonej
- białej, czarnej, niebieskiej
- białej, zielonej, niebieskiej
- czarnej, zielonej, niebieskiej

Z każdego zbioru takich trzech kul możemy utworzyć 3! ciągów. Zatem liczba wszystkich zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A jest równa

$$|A|=3!\cdot4\cdot3\cdot2+3!\cdot4\cdot3\cdot1+3!\cdot4\cdot2\cdot1+3!\cdot3\cdot2\cdot1=300.$$

Prawdopodobieństwa zdarzenia A jest więc równe

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{300}{720}=\frac{5}{12}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że każda z wylosowanych kul będzie innego koloru niż pozostałe jest równe $\frac{5}{12}$.

<u>Schemat oceniania IIsposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ...... 1 pkt

Zdający

- zapisze, że $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!}$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

albo

- wskaże poprawnie cztery przypadki, w których każda z wylosowanych kul będzie innego koloru niż pozostałe.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ...... 2 pkt

Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*:
$|A| = 3! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3! \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 + 3! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 + 3! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 300$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ...... 3 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 720$ oraz, że $|A| = 300$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie bezbłędne ...... 4 pkt

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia *A*: $P(A) = \frac{5}{12}$.

<u>Uwagi</u>

1. Zdający nie musi w jawny sposób napisać $|\Omega| = 720$, wystarczy, że przy obliczaniu prawdopodobieństwa dzieli przez 720.
2. Jeżeli zdający przy wypisywaniu zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A* poda co najmniej jeden z ciągów, w którym znajdują się kule w tym samym kolorze, np. (b_1, b_2, c_1), to może za całe rozwiązanie otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
3. Akceptujemy sytuację, w której zdający zapisze, że zbiór zdarzeń elementarnych ma postać
   $$\Omega = \{(b,b,b),(b,b,c),(b,b,z),(b,b,n),(b,c,c),(b,c,z),(b,c,n),(b,z,n),$$
   $$(b,z,z),(b,z,n),(c,c,c),(c,c,z),(c,c,n),(c,z,z),(c,z,n),(z,z,n)\}$$
   oraz że zdarzeniu *A* sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:
   $(b,c,z),(b,c,n),(b,z,n),(c,z,n)$, $\{b,c,z\},\{b,c,n\},\{b,z,n\},\{c,z,n\}$, o ile z innych zapisów zdającego wynika, że rozróżnia kule tego samego koloru, np. gdy zapisze: $|\Omega| = 720$ lub $|A| = 300$. Jeżeli jednak inne zapisy wskazują na to, że zdający nie rozróżnia kul tych samych kolorów, np. zapisze $|\Omega| = 16$ lub $|A| = 4$, a następnie stosuje klasyczną definicję prawdopodobieństwa, to otrzymuje **0 punktów**.