Rozwiązania zadań I etapu
Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

1. Zauważmy, że

$$3-\sqrt{8}=2-2\sqrt{1\cdot 2}+1=(\sqrt{2}-1)^2,$$
$$5-\sqrt{24}=3-2\sqrt{2\cdot 3}+2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2,$$
$$7-\sqrt{48}=3-2\sqrt{3\cdot 4}+4=(2-\sqrt{3})^2.$$

Stąd mamy

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})=1.$$

2. Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych czworokąta $ABCD$ spełniającego założenia zadania. Oznaczmy

$$a=|SA|,\qquad b=|SB|,\qquad c=|SC|,\qquad d=|SD|.$$

Wiadomo, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg, więc

$$|AB|+|CD|=|BC|+|AD|.$$

Na mocy twierdzenia Pitagorasa $|AB|=\sqrt{|SA|^2+|SB|^2}$; analogicznie można przedstawić długości pozostałych boków czworokąta. Zatem równość powyższą można zapisać następująco:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+d^2}.$$

Podnosząc obie strony równania do kwadratu i dalej przekształcając:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(b^2+c^2)(a^2+d^2)},$$
$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(b^2+c^2)(a^2+d^2),$$
$$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2d^2+c^2d^2,$$
$$a^2d^2+b^2c^2-a^2b^2-c^2d^2=0,$$
$$(a^2-c^2)(b^2-d^2)=0.$$

Zatem $a^2=c^2$ lub $b^2=d^2$, czyli $a=c$ bądź $b=d$, a to właśnie oznacza, że jedna z przekątnych dzieli drugą na połowy.

3. Rozważmy koło o promieniu 10 i dowolnie wybrane w nim 99 punktów. Zbiór wszystkich punktów odległych o co najwyżej 1 od któregokolwiek z wybranych punktów jest sumą kół o środkach w wybranych punktach i promieniu 1. Każde takie koło ma pole równe π, więc ich suma ma pole nie większe niż 99π (gdyż pole sumy dowolnych figur jest nie większe niż suma ich pól). A ponieważ wyjściowe koło ma pole 100π, to istnieją wewnątrz niego punkty nie należące do opisanego zbioru, a zatem odległe o więcej niż 1 od każdego spośród 99 wybranych punktów.

4. Dodajmy stronami wszystkie trzy równania układu. Otrzymujemy

$$50x^2+18y^2+8z^2=12yz+20xz+30xy,$$

co po przegrupowaniu wyrazów jest równoważne

$$(25x^2-30xy+9y^2)+(25x^2-20xz+4z^2)+(9y^2-12yz+4z^2)=0,$$
$$(5x-3y)^2+(5x-2z)^2+(3y-2z)^2=0.$$

Zatem jeśli (x,y,z) jest rozwiązaniem zadanego układu równań, to $5x=3y=2z$, czyli dla pewnego rzeczywistego a zachodzi

$$x=6a,\qquad y=10a,\qquad z=15a.$$

Musimy jeszcze sprawdzić, czy ta trójka liczb jest rozwiązaniem danego układu. Podstawiając te wartości do wyjściowych równań otrzymujemy tożsamości, więc powyższe wzory dla każdego $a\in\mathbb{R}$ określają poprawne rozwiązania zadanego układu.

5. Tak, jest to możliwe.
Ogrodnik może umieścić w pierwszym koszu 1 jabłko, w drugim 2 jabłka, w trzecim 3 jabłka, itd., w trzynastym 13 jabłek, w czternastym 14 jabłek, a w ostatnim koszu 16 jabłek. Istotnie
$$(1+2+3+\ldots+14)+16=\frac{1}{2}(14\cdot 15)+16=105+16=121.$$
6. Tak, możemy.
Zwróćmy uwagę, że jeśli mamy n monet o których wiemy, że ważą łącznie W gramów, to wiemy dokładnie, ile spośród nich jest prawdziwych, a ile fałszywych. Istotnie, oznaczając przez p liczbę monet prawdziwych, a przez f fałszywych mamy:
$$\begin{cases} p+f=n, \\ 10p+9f=W. \end{cases}$$
Ten układ równań ma zawsze jednoznaczne rozwiązanie:
$$p=W-9n, \qquad f=10n-W.$$
Wiemy więc, że mamy do czynienia z sytuacją, w której dokładnie 3 monety są prawdziwe.
Oznaczmy posiadane monety literami A,B,C,D,E. W pierwszym ważeniu kładziemy na wadze monety A i B. Rozważmy trzy przypadki:
— Obie monety A,B są fałszywe. Wtedy wszystkie monety C,D,E muszą być prawdziwe (gdyż wiemy że posiadamy łącznie tylko dwie fałszywe monety).
— Obie monety A,B są prawdziwe. Wtedy dokładnie jedna z monet C,D,E jest prawdziwa. Możemy wykonać dwa ważenia, w każdym ważąc jedną z monet C i D. Wtedy albo któraś okaże się prawdziwa, albo obie okażą się fałszywe (i będziemy wiedzieć, że to E jest prawdziwa).
— Dokładnie jedna z monet A,B jest prawdziwa. Wtedy dokładnie jedna z monet C,D,E jest fałszywa. Ważymy więc teraz A i C łącznie. Znów musimy rozważyć trzy przypadki:
  — Obie monety A,C są prawdziwe. Wtedy wiadomo, że fałszywe są monety: B i dokładnie jedna spośród D,E (jedno ważenie pozwoli z łatwością stwierdzić, która).
  — Obie monety A,C są fałszywe. Wtedy wszystkie monety B,D,E są prawdziwe.
  — Dokładnie jedna z monet A,C jest prawdziwa. Jeśli byłaby to A, to B i C musiałyby być fałszywe, zaś D i E prawdziwe. Jeśli byłaby to C, to A byłaby fałszywa, więc B prawdziwa. Podsumowując, w tym przypadku zestawem prawdziwych monet jest jeden z następujących (A,D,E), (B,C,D), (B,C,E). Zważenie łącznie monet A i D wystarczy do stwierdzenia, która z tych sytuacji ma miejsce.

7. Skoro $|BA|=|BC|=|BD|$, to punkt B jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADC. Ponieważ zaś B leży na odcinku AC, to odcinek ten jest średnicą rozważanego okręgu. Kąt ADC, jako kąt wpisany oparty na średnicy, jest więc prosty. Długość odcinka CD można więc wyznaczyć z twierdzenia Pitagorasa:
$$|CD|=\sqrt{|AC|^2-|AD|^2}=\sqrt{34^2-16^2}=\sqrt{1156-256}=\sqrt{900}=30.$$