Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

poziom rozszerzony

1 maja 2021

Czas pracy: 180 minut

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, których iloczyn cyfr jest dodatnią liczbą złożoną?
A) 59029 B) 59028 C) 89980 D) 89979

ZADANIE 2 (1 PKT)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \begin{cases} ||x-2|-4| & \text{dla } x < 0 \\ x-1 & \text{dla } x \geqslant 0 \end{cases}$

Równanie $f(x) = 2$ ma dokładnie
A) jedno rozwiązanie. B) dwa rozwiązania. C) cztery rozwiązania. D) pięć rozwiązań.

ZADANIE 3 (1 PKT)

Pochodna funkcji $f(x)$ jest równa $f'(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$. Funkcja f może mieć wzór
A) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2$ B) $f(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$
C) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ D) $f(x) = 9x^2 - 4x + 1$

ZADANIE 4 (1 PKT)

Granica $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2-3x^5)^3}{(3-2x^3)^5}$ jest równa
A) $\frac{27}{32}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{8}{243}$ D) $\frac{3}{2}$

Zadanie 5 (2 pkt)

Niech $a = \log_{18} 3$. Wykaż, że $\log_6 81 = \frac{4a}{1-a}$.

Zadanie 6 (3 pkt)

W fabryce obuwia pracuje pięć linii produkcyjnych produkujących ten sam model butów. W poniższej tabeli zawarto informacje o wydajności tych linii oraz o odsetku wadliwych par obuwia produkowanych przez każdą z nich.

Linia produkcyjna	Wydajność	Odsetek wadliwych par
I	60 par/godzinę	2%
II	50 par/godzinę	3%
III	40 par/godzinę	1%
IV	80 par/godzinę	3%
V	70 par/godzinę	2%

Wybieramy losowo jedną parę obuwia wyprodukowaną przez te linie produkcyjne. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana para nie okaże się wadliwa?

Zadanie 7 (3 pkt)

Wykaż, że jeżeli $a > b \geqslant 1$, to $\frac{a}{3+a^4} < \frac{b}{3+b^4}$.

ZADANIE 8 (4 PKT)

Rozwiąż równanie $(4\cos^2 x - 1) \cdot \cos x = \sin^2 x - 3\cos^2 x$, dla $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Zadanie 9 (4 pkt)

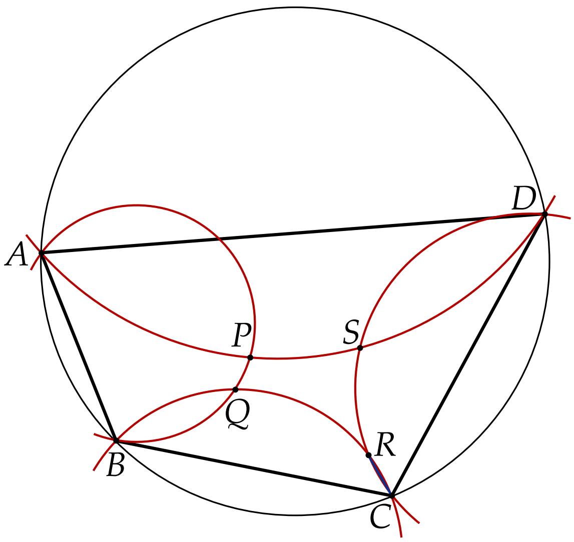
W trójkąt równoramienny ABC o podstawie długości $|AB| = 14$ i polu 168 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek A z punktem wspólnym okręgu i ramienia BC.

ZADANIE 10 (3 PKT)

Wielomian $W(x)$ stopnia 3 jest podzielny przez trójmian kwadratowy $P(x) = x^2 - x - 72$. Wiadomo ponadto, że $26W(10) + 21W(7) = 0$. Wyznacz miejsca zerowe wielomianu $W(x)$.

Zadanie 11 (4 pkt)

Przez każde dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg poprowadzono okrąg (zobacz rysunek).



Wykaż, że punkty P, Q, R, S, w których przecinają się te okręgi, leżą na jednym okręgu.

Zadanie 12 (5 pkt)

Współczynniki wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ spełniają warunek: $a - b + c = 1$. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki $a,\ b$ i c . Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

ZADANIE 13 (5 PKT)

Odcinek AB o długości 20 jest zawarty w prostej o równaniu $3y + 4x - 5 = 0$. Symetralna odcinka AB przecina oś Ox w punkcie $P = \left(-\frac{40}{3}, 0\right)$. Oblicz współrzędne końców odcinka AB.

ZADANIE 14 (6 PKT)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{k^2+9k+14}{k-1}x^2 + (k+2)x + k - 1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz całkowite wartości parametru k, dla których funkcja f przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.

Zadanie 15 (7 pkt)

Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt, w którym jeden bok jest dwa razy dłuższy od drugiego. Pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest równe 1. Jakie powinny być wymiary tego prostopadłościanu, aby jego objętość była największa? Oblicz tę największą objętość.