

**Egzamin maturalny  
maj 2009**

**MATEMATYKA  
POZIOM PODSTAWOWY**

**KLUCZ PUNKTOWANIA  
ODPOWIEDZI**



**Zadanie 1.**

a)

Korzystanie z informacji	Wyznaczanie wartości funkcji dla danych argumentów i jej miejsca zerowego.	0–2
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli bezbłędnie uzupełni tabelę.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie zapisze tylko wartości funkcji dla argumentów  $(-3)$  oraz 3 albo wyznaczy tylko miejsce zerowe funkcji.

Poprawna odpowiedź:

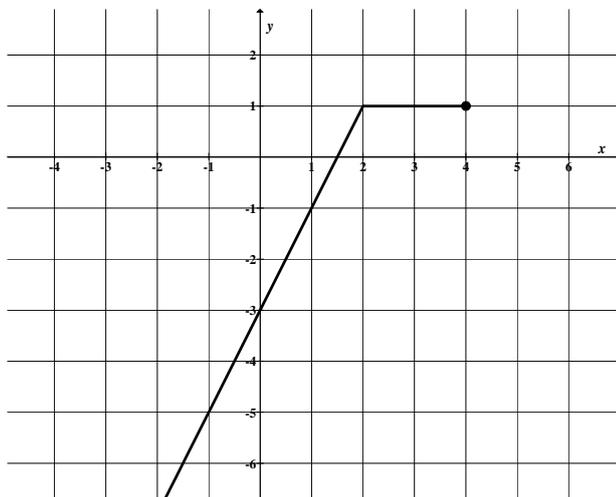
$x$	$-3$	$3$	$1,5$
$f(x)$	$-9$	$1$	$0$

b)

Korzystanie z informacji	Rysowanie wykresu funkcji.	0–1
--------------------------	----------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli bezbłędnie narysuje wykres funkcji  $f$ .

Poprawna odpowiedź:



c)

Korzystanie z informacji	Odczytywanie własności funkcji liniowej.	0–1
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli rozwiąże nierówność  $f(x) \geq -6$ .

Poprawna odpowiedź:  $x \geq -\frac{3}{2}$ .

Wiadomości i rozumienie	Wyznaczanie liczb całkowitych należących do danego przedziału liczbowego.	0–1
-------------------------	---	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wypisze wszystkie całkowite argumenty funkcji  $f$  spełniające nierówność  $f(x) \geq -6$ .

Poprawna odpowiedź:  $-1, 0, 1, 2, 3, 4$ .

### Zadanie 2.

Tworzenie informacji	Podawanie opisu matematycznego sytuacji przedstawionej w zadaniu w postaci układu równań.	0–2
----------------------	---	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli zapisze układ równań opisujący warunki zadania, np.

$$\begin{cases} m+n=140 \\ m+15n=980 \end{cases}$$

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze jedno z równań, które opisuje warunki zadania, np.  $7(m+n)=980$  albo  $m+15n=980$  albo  $6m=8n$ .

Korzystanie z informacji	Rozwiązywanie układu równań liniowych.	0–1
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli rozwiąże układ równań i poda liczby detali do wykonania przez każdego z rzemieślników.

Poprawna odpowiedź:  $m=80$  i  $n=60$ .

### Zadanie 3.

a)

Korzystanie z informacji	Rozwiązywanie nierówności kwadratowej zapisanej na podstawie tekstu zadania.	0–2
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli przekształci nierówność  $f(x)+5 < 3x$  do postaci nierówności kwadratowej, np.  $-2x^2 - 3x + 5 < 0$  i rozwiąże ją.

Poprawna odpowiedź:  $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (1, \infty)$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli przekształci nierówność  $f(x)+5 < 3x$  do postaci nierówności kwadratowej i na tym poprzestanie lub popełni błędy w rozwiązaniu tej nierówności.

b)

Korzystanie z informacji	Podawanie zbioru wartości funkcji.	0–1
--------------------------	------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poda zbiór wartości funkcji  $g$ .

Poprawna odpowiedź:  $(-\infty, 8)$ .

c)

Korzystanie z informacji	Przekształcanie wzoru funkcji do innej postaci.	0–2
--------------------------	---	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy współczynniki  $b$  i  $c$ .

Poprawna odpowiedź:  $b=12$ ,  $c=-10$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie obliczy tylko jeden ze współczynników albo zapisze poprawnie warunki pozwalające na obliczenie współczynników  $b$  i  $c$ , ale popełni błąd przy obliczaniu tych współczynników.

**Zadanie 4.**

Korzystanie z informacji	Stosowanie praw działań na potęgach o wykładniku naturalnym.	0–2
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli poprawnie zastosuje prawa działań na potęgach i zapisze równanie w postaci umożliwiającej obliczenie niewiadomej, np.  $7x = 3^{54}(3^2 - 3 + 1)$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze liczby  $243^{11}$ ,  $81^{14}$ ,  $9^{27}$  w postaci potęg liczby 3 i na tym poprzestanie lub w dalszej części rozwiązania popełni błędy.

Wiadomości i rozumienie	Rozwiązanie równania liniowego.	0–1
-------------------------	---------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wykaże, że liczba  $x = 3^{54}$  jest rozwiązaniem równania, np.

$$7x = 3^{54}(3^2 - 3 + 1) \text{ stąd } 7x = 3^{54} \cdot 7, \text{ więc } x = 3^{54}.$$

**Zadanie 5.**

**a)**

Tworzenie informacji	Zapisywanie warunków wynikających z równości wielomianów.	0–1
----------------------	---	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wszystkie zależności wynikające z równości wielomianów  $2a + 3 = a$  i  $a + b + c = -4$ , i  $b = -1$ .

Korzystanie z informacji	Rozwiązanie układu równań liniowych.	0–2
--------------------------	--------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy współczynniki  $a$  i  $c$ .

Poprawna odpowiedź:  $a = -3$  i  $c = 0$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy poprawnie tylko jeden ze współczynników.

**b)**

Korzystanie z informacji	Rozkładanie wielomianu na czynniki.	0–2
--------------------------	-------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli rozłoży wielomian na czynniki liniowe.

Poprawna odpowiedź:  $W(x) = x(x + 4)(x - 1)$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wielomian w postaci iloczynu wielomianów, z których jeden jest stopnia drugiego  $W(x) = x(x^2 + 3x - 4)$  lub  $W(x) = (x - 1)(x^2 + 4x)$ , lub  $W(x) = (x + 4)(x^2 - x)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zadanie 6.**

a)

Korzystanie z informacji	Zastosowanie definicji funkcji trygonometrycznych do rozwiązania problemu.	0–2
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli skorzysta z definicji trygonometrycznych kąta  $\alpha$  w trójkącie prostokątnym i przekształci wyrażenie  $\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha$  do postaci  $\frac{a(b-c)}{bc}$ , gdzie  $a$  i  $b$  są odpowiednimi długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, zaś  $c$  jest długością przeciwprostokątnej.

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli skorzysta z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$  w trójkącie prostokątnym i zapisze:  $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$  i na tym poprzestanie.

Tworzenie informacji	Uzasadnienie nierówności.	0–1
----------------------	---------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni nierówność  $\sin \alpha - \operatorname{tg} \alpha < 0$  powołując się, np. na znak różnicy  $b - c < 0$ .

b)

Korzystanie z informacji	Stosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta do przekształcania tożsamości trygonometrycznych.	0–2
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy wartość wyrażenia  $\cos^3 \alpha + \cos \alpha \sin^2 \alpha$ .

Poprawna odpowiedź:  $\frac{1}{3}$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli tylko obliczy wartość funkcji  $\cos \alpha$  i na tym zakończy rozwiązanie.

Poprawna odpowiedź:  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .

**Zadanie 7.**

a)

Korzystanie z informacji	Stosowanie wzoru na $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego.	0–2
--------------------------	---	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy różnicę  $r$  ciągu  $(a_n)$  oraz jego pierwszy wyraz.

Poprawna odpowiedź:  $r = 2$ ,  $a_1 = -11$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy tylko różnicę ciągu i na tym zakończy rozwiązanie lub w dalszych obliczeniach popełni błąd.

b)

Korzystanie z informacji	Stosowanie wzoru na $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego.	0–1
--------------------------	---	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy wyraz  $a_8$ .

Poprawna odpowiedź:  $a_8 = 3$ .

Wiadomości i rozumienie	Sprawdzanie z definicji, czy dany ciąg jest geometryczny.	0–1
-------------------------	---	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni, że ciąg  $(a_7, a_8, a_{11})$  jest ciągiem geometrycznym.

c)

Wiadomości i rozumienie	Stosowanie definicji na sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.	0–1
-------------------------	---	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli zapisze wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ .

Poprawna odpowiedź:  $S_n = n^2 - 12n$ ,  $n \geq 1$ .

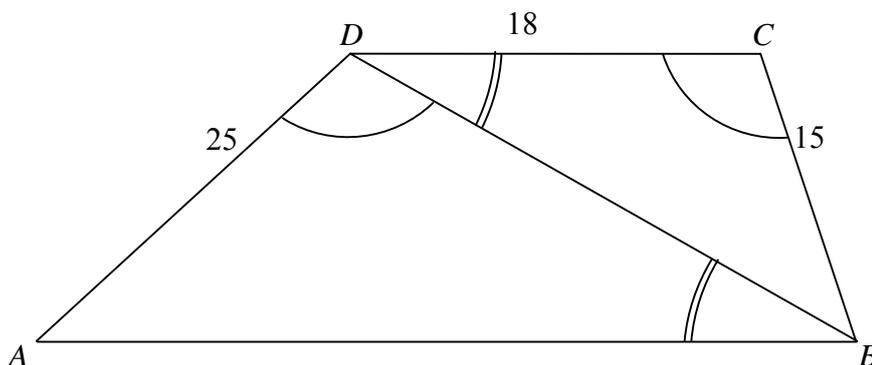
Korzystanie z informacji	Wykorzystanie własności funkcji kwadratowej.	0–1
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wyznaczy liczbę  $n$ , dla której  $S_n$  osiąga wartość najmniejszą.

Poprawna odpowiedź:  $n = 6$ .

### Zadanie 8.

Tworzenie informacji	Dobieranie odpowiedniego algorytmu do rozwiązania zadania.	0–3
----------------------	--	-----



Zdający otrzymuje 3 punkty, jeśli wykorzysta podobieństwo trójkątów  $ABD$  oraz  $BDC$  i obliczy długość przekątnej  $BD$  oraz podstawy  $AB$ .

Poprawna odpowiedź:  $|BD| = 30$ ,  $|AB| = 50$ .

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy długość odcinka  $BD$  wykorzystując przy tym podobieństwo trójkątów  $ABD$  oraz  $BDC$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni, że trójkąty  $ABD$  i  $BDC$  są podobne i na tym zakończy rozwiązanie lub popelni błędy.

Wiadomości i rozumienie	Stosowanie związków miarowych w figurach płaskich.	0–1
-------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy obwód trapezu (pod warunkiem, że poprawnie obliczy długość podstawy  $AB$ ).

Poprawna odpowiedź: 108.

**Zadanie 9.**

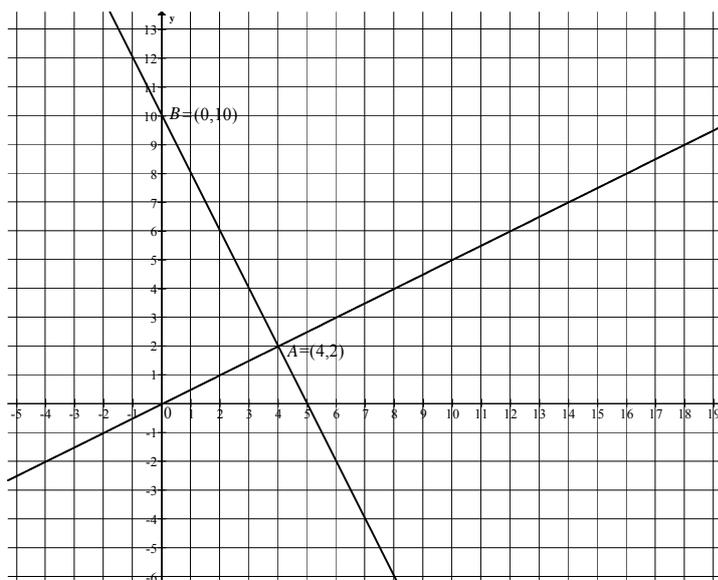
Korzystanie z informacji	Wyznaczenie równania prostej spełniającej warunki zadania.	0–2
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli zapisze równanie prostej  $AB$  prostopadłej do prostej  $OA$ .

Poprawna odpowiedź:  $y = -2x + 10$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli wyznaczy tylko współczynnik kierunkowy prostej  $AB$  i na tym przestanie.

Poprawna odpowiedź:  $(-2)$ .



Korzystanie z informacji	Obliczenie współrzędnych punktu przecięcia dwóch prostych.	0–1
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy współrzędne punktu  $A$ .

Poprawna odpowiedź:  $A = (4, 2)$ .

Wiadomości i rozumienie	Wykorzystanie pojęcia odległości na płaszczyźnie kartezjańskiej.	0–1
-------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy długość przyprostokątnej  $OA$ .

Poprawna odpowiedź:  $|OA| = 2\sqrt{5}$ .

**Zadanie 10.**

**a)**

Korzystanie z informacji	Obliczanie średniej arytmetycznej.	0–2
--------------------------	------------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy średnią liczbę błędów i zapisze wynik w zaokrągleniu do całości.

Poprawna odpowiedź:  $\bar{x} = \frac{57}{30} = 1,9 \approx 2$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie zastosuje wzór na średnią arytmetyczną i na tym przestanie lub popełni błąd w obliczaniu średniej, albo źle zaokrągli wynik.

**b)**

Korzystanie z informacji	Obliczanie prawdopodobieństwa zdarzeń.	0–3
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 3 punkty, jeśli obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  i zapisze wynik w postaci ułamka nieskracalnego.

Poprawna odpowiedź:  $P(A) = \frac{63}{145}$ .

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy moc zbioru  $\Omega$  i moc zbioru  $A$  w tym samym modelu i na tym poprzestanie lub popełni błąd w obliczeniach, albo nie poda prawdopodobieństwa w postaci ułamka nieskracalnego.

Poprawna odpowiedź:  $|\Omega| = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435$  i  $|A| = 21 \cdot 9 = 189$  lub  $|\Omega| = 30 \cdot 29$  i  $|A| = 21 \cdot 9 \cdot 2$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli poprawnie policzy moc zbioru  $\Omega$ .

**Zadanie 11.**

**a)**

Korzystanie z informacji	Stosowanie związków miarowych w bryłach z użyciem trygonometrii.	0–4
--------------------------	--	-----

Zdający otrzymuje 4 punkty, jeśli obliczy objętość walca.

Poprawna odpowiedź:  $V = \frac{54\sqrt{3}}{\pi}$ .

Zdający otrzymuje 3 punkty, jeśli obliczy pole powierzchni bocznej walca i promień jego podstawy i na tym zakończy lub popełni błąd w obliczaniu objętości walca.

Poprawna odpowiedź:  $P_b = 36\sqrt{3}$ ,  $r = \frac{3}{\pi}$ .

Zdający otrzymuje 2 punkty, jeśli obliczy pole powierzchni bocznej walca albo wysokość walca i promień jego podstawy i nie kontynuuje rozwiązania.

Poprawna odpowiedź:  $P_b = 36\sqrt{3}$  albo  $h = 6\sqrt{3}$  i  $r = \frac{3}{\pi}$ .

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli obliczy długość jednego z boków prostokąta, który jest powierzchnią boczną walca:  $h$  lub  $2\pi r$ .

Poprawna odpowiedź:  $h = 6\sqrt{3}$  lub  $2\pi r = 6$ .

Wiadomości i rozumienie	Szacowanie wartości liczbowej.	0–1
-------------------------	--------------------------------	-----

Zdający otrzymuje 1 punkt, jeśli uzasadni, że objętość walca jest mniejsza od  $18\sqrt{3}$ .

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w kluczu punktowania przyznajemy maksymalną liczbę punktów.