Wpisuje zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

Miejsce na nalepkę
z kodem szkoły

PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY
Z MATEMATYKI

CKA – kurs przygotowujący
28 kwietnia 2005

CENTRUM KSZTAŁCENIA AKADEMICKIEGO

Arkusz II
Poziom rozszerzony

Czas pracy 150 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Proszę sprawdzić, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 11 stron. Ewentualny brak należy zgłosić przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania i odpowiedzi należy zapisać czytelnie w miejscu na to przeznaczonym przy każdym zadaniu.
3. Proszę pisać tylko w kolorze czarnym; nie pisać ołówkiem.
4. W rozwiązaniach zadań trzeba przedstawić tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
5. Nie wolno używać korektora.
6. Błędne zapisy trzeba wyraźnie przekreślić.
7. Brudnopis nie będzie oceniany.
8. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.`
9. Podczas egzaminu można korzystać z udostępnionego zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora. Nie można korzystać z kalkulatora graficznego.

Życzymy powodzenia!

Wpisuje egzaminator / nauczyciel sprawdzający pracę

Nr. zadania	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.**	**SUMA**
Maksymalna liczba punktów	4	6	5	4	6	3	5	6	6	5	50
Uzyskana liczba punktów											

Uwaga!

Tylko na naszych stronach internetowych:

www.zadania.pl
www.cka.pl
www.rozwiazania.pl

w dniu matury z matematyki tradycyjnie zamieścimy PEŁNE rozwiązania zadań maturalnych.

Serdecznie Zapraszamy.

CKA

ZADANIE 1.*(3 punkty)* Wykaż, że jeżeli współczynniki równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$, gdzie $a\neq 0$ spełniają równanie $a-b+c=0$, to równanie takie ma co najmniej jedno rozwiązanie.

ROZWIĄZANIE

Zauważmy, że z równania $a-b+c=0$, mamy: $b=a+c$.

Równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie, gdy $\Delta\geq 0$. Mamy, zatem:

$$\Delta=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=a^2+2ac+c^2-4ac=a^2-2ac+c^2=(a-c)^2\geq 0.$$

Kwadrat każdej liczby jest nieujemny. Zatem dowód został zakończony.

ZADANIE 2. ***(4 punkty)*** Dla jakich wartości parametru a i b liczba 1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu $P(y)=y^3+ay^2+y-b$.

ROZWIĄZANIE

Sposób 1. Przedstawiamy wielomian P w postaci iloczynowej (przez poznany trzeci z jego pierwiastków): $P(y)=(y-1)^2(y-p)=y^3-(p+2)y^2+(1+2p)y-p$.

Porównując współczynniki otrzymujemy układ równań z niewiadomymi a, b, p:

$$\begin{cases}-(p+2)=a,\\ 1+2p=1,\\ -p=-b,\end{cases}$$

stąd $p=0,\ a=-2,\ b=0$.

Odp. $a=-2$, $b=0$.

Sposób 2. Liczba 1 jest pierwiastkiem podwójnym wielomianu P, jeżeli:

$P(1)=0$ i $P'(1)=0$.

Obliczamy pochodną funkcji P:

$P'(y)=3y^2+2ay+1$.

Skąd otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases}1+a+1-b=0,\\ 3+2a+1=0.\end{cases}$$

Z drugiego równania mamy

$2a=-4$, $a=-2$. Tak wyznaczone a wstawiamy do równania pierwszego.

$1-2+1-b=0$, $b=0$.

Odp. $a=-2$, $b=0$.

Sposób 3. Mamy: $P(1)=a-b+2=0$, więc $a=b-2$. Stąd

$$P(y)=y^3+(b-2)y^2+y-b=y^3-2y^2+y+b\left(y^2-1\right)=y(y-1)^2+b\left(y^2-1\right).$$

Ponieważ $(y-1)^2$ ma dzielić wielomian P ,więc $(y-1)^2$ dzieli $b(y-1)(y+1)$, co jest możliwe tylko w przypadku $b=0$. Mamy więc:

$P(y)=y^3-2y^2+y$, a zatem $a=-2$, $b=0$.

ZADANIE 3 (5 punktów) Rozwiąż nierówność: $1+\sqrt{x+5}>x$.

ROZWIĄZANIE

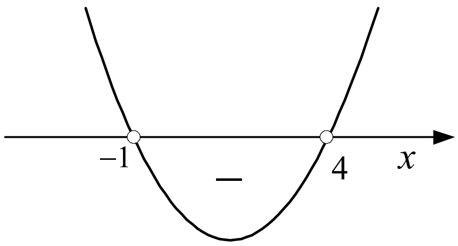
Dziedziną nierówności są liczby $x\geq -5$.

Rozwiązujemy zatem nierówność $\sqrt{x+5}>x-1$.

Zauważmy, że dla $x<1$, prawa strona jest ujemna i nierówność spełniona jest tożsamościowo. W tym przypadku rozwiązaniem są liczby $x\in\left\langle -5,1\right)$. Zatem rozwiązujemy nierówność dla $x\geq 1$ podnosząc ją obustronnie do kwadratu.

$x+5>(x-1)^2$, $\qquad x+5>x^2-2x+1$, $\qquad x^2-3x-4<0$.

Rozwiązujemy ostatnią nierówność:



$x\in(-1,4) \quad \wedge \quad x\geq 1$. Stąd $x\in\left\langle 1,4\right)$.

Ostatecznie $x\in\left\langle -5,1\right)$ lub $x\in\left\langle 1,4\right\rangle$, czyli $x\in\left\langle -5,4\right)$.

Odp. $x\in\left\langle -5,4\right)$.

ZADANIE 4 ***(5 punktów)*** Dany jest ciąg w którym $a_1 = 2,\quad a_{n+1} = a_n + 2n + 2$. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu $\{ a_n \}$.

ROZWIĄZANIE

Wyznaczamy kilka początkowych wyrazów ciągu danych rekurencyjnie. Podstawiając do wzoru kolejne liczby naturalne otrzymujemy:

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1 + 2 + 2 = 2 + 2 + 2 = 6$,

$a_3 = a_2 + 2\cdot 2 + 2 = 6 + 4 + 2 = 12$,

$a_4 = a_3 + 2\cdot 3 + 2 = 12 + 6 + 2 = 20$,

$a_5 = a_4 + 2\cdot 4 + 2 = 20 + 8 + 2 = 30$,

$a_6 = a_5 + 2\cdot 5 + 2 = 30 + 10 + 2 = 42$,

$\vdots$

Ze wzoru określającego ciąg mamy

$a_{n+1} - a_n = 2n + 2 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$.

Przyjmując:

$b_1 = a_1 = 2$,

$b_n = a_n - a_{n-1} = 2(n-1) + 2 = 2n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Możemy zapisać:

$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_2 - a_1) + a_1 = b_n + b_{n-1} + \ldots + b_1$,

Gdyż wszystkie wyrazy prawej strony z wyjątkiem pierwszego ulegają skróceniu.

Mamy wobec tego

$$a_n = 2n + 2(n-1) + \ldots + 4 + 2 = 2(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{2n(n+1)}{2} = n^2 + n .$$

Odp. $a_n = n(n+1)$.

ZADANIE 5. ***(7 punktów)*** Rozwiąż równanie: $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \ldots = \sin x + \cos x$

ROZWIĄZANIE

Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$S = \frac{a_1}{1-q}$, dla $|q| < 1$, otrzymujemy:

$\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \sin x + \cos x$ i $|\operatorname{tg} x| < 1$,

stąd kolejno mamy:

$\frac{\sin x}{\cos x - \sin x} = \sin x + \cos x$, $\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$,

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Podstawiamy $\sin x = t$ i otrzymujemy:

$2t^2 + t - 1 = 0$, skąd $t_1 = -1$ lub $t_2 = \frac{1}{2}$.

Mamy, więc

$\sin x = -1$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$.

Pierwsze z równań ma rozwiązania $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; ta seria rozwiązań nie spełnia równania wyjściowego, gdyż funkcja $\operatorname{tg} x$ jest dla tych wartości nieokreślona.

Równanie $\sin x = \frac{1}{2}$, $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$, ma rozwiązania

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ oraz mamy:

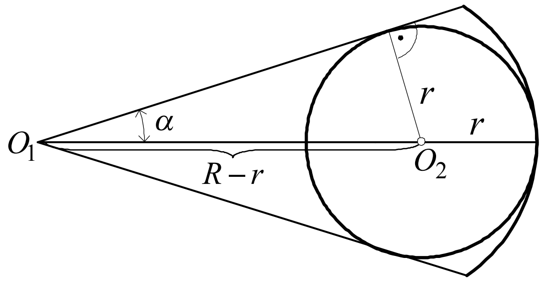
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

a więc spełnia założenie $|\operatorname{tg} x| < 1$.

Odp. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

ZADANIE 6 ***(4 punkty)*** W wycinek koła o promieniu R i kącie ostrym 2α wpisano okrąg. Obliczyć promień tego okręgu.

ROZWIĄZANIE



Mamy: $\frac{r}{R-r} = \sin\alpha$,

stąd bezpośrednio wyliczamy r:

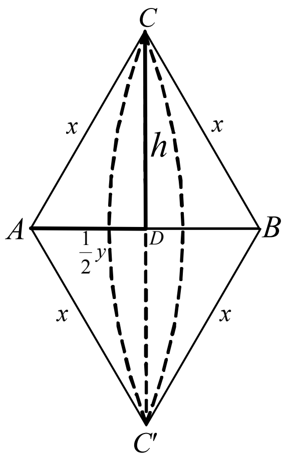
$r = R\sin\alpha - r\sin\alpha$,

$r(1+\sin\alpha) = R\sin\alpha$.

Odp. $r = \frac{R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$.

ZADANIE 7 ***(7 punktów)*** Trójkąt równoramienny o danym obwodzie m obraca się dookoła podstawy. Podać maksymalną objętość powstałej w ten sposób bryły.

ROZWIĄZANIE



Objętość bryły powstałej przez obrót trójkąta równoramiennego przedstawionego na rysunku określa wzór: $V = 2\cdot\frac{1}{3}\pi h^2\cdot\frac{1}{2}y$, czyli $V = \frac{1}{3}\pi h^2 y$. Obwód trójkąta ABC wynosi m, czyli

$y + 2x = m$ stąd $y = m - 2x$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC, otrzymujemy: $h^2 + \frac{1}{4}y^2 = x^2$, skąd $h^2 = x^2 - \frac{1}{4}y^2$.

Ponieważ $y = m - 2x$ to

$h^2 = x^2 - \frac{1}{4}(m-2x)^2$, stąd $h^2 = mx - \frac{1}{4}m^2$.

Objętość bryły w zależności od x jest równa:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi\left(mx - \frac{1}{4}m^2\right)\cdot(m-2x) = \frac{\pi}{3}\left(-2mx^2 + \frac{3}{2}m^2x - \frac{1}{4}m^3\right) \text{ dla } 0 < x < \frac{m}{2}.$$

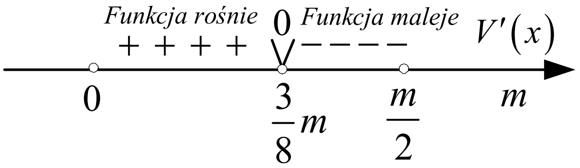
Wyznaczamy maksimum funkcji

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\left(-4mx + \frac{3}{2}m^2\right),$$

a następnie badamy znak pochodnej:

$$V'(x) > 0 \Leftrightarrow -4mx + \frac{3}{2}m^2 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{8}m.$$

Na osi zaznaczamy znak pochodnej



Stąd wynika, że maksimum funkcji jest w punkcie $x_0 = \frac{3}{8}m$, a więc:

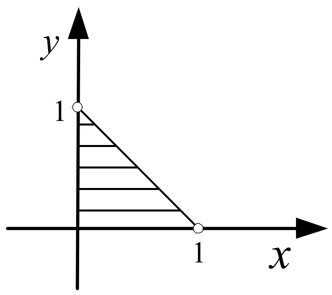
Odp. $V_{\max} = V\left(\frac{3}{8}m\right) = \frac{\pi}{96}m^3$.

ZADANIE 8 ***(5 punktów)*** Narysować zbiór $A \cap B$, jeśli $A = \{(x, y): |x| + |y| \le 1\}$, $B = \{(x, y): y \ge |\log_2(x+1)|\}$.

ROZWIĄZANIE

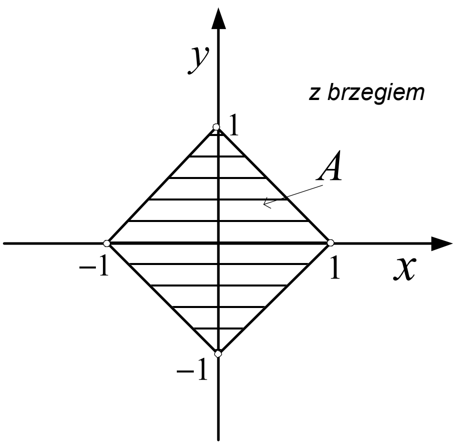
Zbiór A jest symetryczny względem osi układu współrzędnych.

Dla $x \ge 0 \wedge y \ge 0$, mamy $x + y \le 1$.

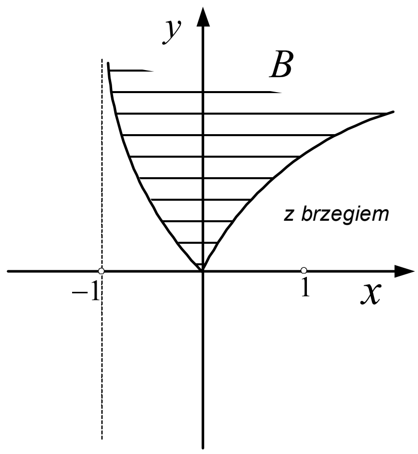


Po odbiciu tego zbioru względem osi układu współrzędnych, mamy rysunek a.

W celu wyznaczenia zbioru *B*, przedstawiamy wykres funkcji $y = |\log_2(x+1)|$ na rysunku b.

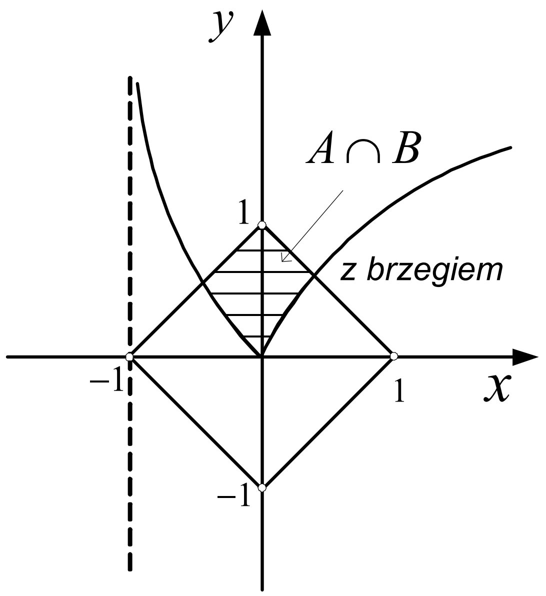


rys a.



rys b.

natomiast zbiór $A \cap B$ przedstawia rysunek c, oraz $A \setminus B$ przedstawiono na rysunku d.



rys c.

ZADANIE 9 ***(5 punktów)*** Znaleźć wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x}\right)^{12}$ w którym nie występuje x.

ROZWIĄZANIE

Korzystając z dwumianu Newtona:

$$\left(a+b\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\ ,$$

mamy

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x}\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^{\frac{12-k}{3}}\cdot\frac{2^k}{x^k}=\sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^{\frac{12-k}{3}-k}\cdot 2^k\ .$$

W tym wyrażeniu x nie będzie występował, gdy:

$$\frac{12-k}{3}-k=0\ ,$$

czyli $12-k-3k=0$, stąd $k=3$.

Obliczamy wyraz czwarty równania:

$$\binom{12}{3}\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^9\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^3=\binom{12}{3}x^3\cdot\frac{8}{x^3}=8\cdot\binom{12}{3}=8\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}=8\cdot 10\cdot 11\cdot 2=1760\ .$$

Zadanie 10 ***(5 punktów)*** Rzucamy raz kostką, a następnie monetą tyle razy, ile oczek wypadło na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo, że ani razu nie wyrzucimy reszki.

ROZWIĄZANIE

Niech A_i oznacza wyrzucenie kostką i oczek dla $i = 1, 2, \ldots, 6$, natomiast

B, nie wyrzucenie reszki, czyli wyrzucamy same orły.

Mamy $P(A_i) = \frac{1}{6}$ dla $i = 1, 2, \ldots, 6$ oraz

$P(B / A_i) = \frac{1}{2^i}$, $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Zastosujemy wzór na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \ldots + P(A_6)P(B/A_6) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^6}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^6}\right) = \frac{63}{384} = \frac{21}{128}.$$

Zadania pochodzą z książek naszego wydawnictwa

1. Matematyka nowa matura - zagadnienia teoretyczne wraz z przykładami cz. I.
2. Matematyka nowa matura - 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzem cz.II

„Matematyka – nowa matura - zagadnienia teoretyczne wraz z przykładami cz.1” jest książką przeznaczoną dla uczniów przygotowujących się do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym i rozszerzonym. Zawiera opracowanie zagadnień teoretycznych zgodnych z wymaganiami programu nauczania. Zawarty materiał przedstawiony jest sposób zwięzły, zobrazowany licznymi przykładami. Książka obejmuje wszystkie zagadnienia obowiązujące na egzaminie maturalnym z matematyki tj.

podstawowe działania (procenty, średnie, wykresy i diagramy), funkcja liniowa i kwadratowa, wielomiany, równania i nierówności algebraiczne, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna, funkcje trygonometryczne, funkcje cyklometryczne, indukcja matematyczna, dwumian Newtona, ciągi liczbowe, funkcja i rachunek różniczkowy, planimetria, stereometria, geometria analityczna, kombinatoryka, rachunek prawdopodobieństwa i zmienna losowa oraz elementy statystyki.

Doskonałym uzupełnieniem tej pozycji jest książka naszego wydawnictwa *„Matematyka – nowa matura – 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami”.*

Wydawnictwo: Centrum Kształcenia Akademickiego CKA
Wydanie: pierwsze styczeń 2005
Format: A5
Ilość stron: 237
Cena detaliczna: 35,- PLN
ISBN: 83-918391-3-3

ISBN 839183913-3
9788391839133

„Matematyka – nowa matura - 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami cz.II” . Książka zawiera 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami. Jest to jedyna taka publikacja na rynku, zawierająca tak ogromną bazę zadań przeznaczoną do przygotowania się do nowej matury z matematyki. Zadania zostały ułożone działami matematyki i obejmują poziom podstawowy i rozszerzony. Doskonałym uzupełnieniem drugiej części książki jest *„Matematyka – nowa matura - zagadnienia teoretyczne wraz z przykładami cz.1”* gdzie zawarta jest teoria niezbędna do rozwiązywania zadań. Obydwie książki stanowią integralną całość ale zakupić je można osobno.
Autorzy obu pozycji z matematyki są przekonani, że dzięki tym obu książkom maturzysta nabędzie umiejętności rozumienia i rozwiązywania zadań z tej, całkiem przyjemnej, dziedziny, jaką jest matematyka. A co najważniejsze skutecznie przygotuje się do egzaminu maturalnego.

Wydawnictwo: Centrum Kształcenia Akademickiego CKA
Wydanie: pierwsze styczeń 2005

Format: A5
Ilość stron: 601
Cena detaliczna: 49,90 PLN
ISBN: 83-918391-4-1

ISBN 839183914-1
9788391839140

Przykładowe zadania z książki „Matematyka nowa matura – 1001 zadań z pełnymi rozwiązaniami i komentarzami cz. II” © CKA 2005 są dostępne na naszej stronie internetowej do bezpłatnego pobrania.

Książkę można zamówić na naszej stronie internetowej www.cka.pl lub www.zadania.pl.

Serdecznie zapraszamy!