VI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego
(19 marca 2011 r.)

1. Czy istnieją takie liczby całkowite a i b, że liczby

$$a^2+b \quad \text{oraz} \quad a+b^2$$

są kolejnymi liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest 99-kąt foremny. Wyznacz liczbę trójkątów równoramiennych, których wierzchołki pokrywają się z wierzchołkami danego wielokąta.

3. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg styczny do prostej AI w punkcie I i przechodzący przez punkt B przecina bok BC w punkcie P (różnym od B). Proste IP i AC przecinają się w punkcie Q. Wykaż, że punkt I jest środkiem odcinka PQ.

4. Liczby p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba p^2+q^2 nie jest podzielna przez liczbę $p+q$.

5. Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty A_1, A_2, A_3, ..., A_{100}. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P, dla którego

$$PA_1+PA_2+\ldots+PA_{100} \geqslant 100\,.$$