Centralna Komisja Egzaminacyjna w Warszawie

EGZAMIN MATURALNY 2010

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

Klucz punktowania odpowiedzi

MAJ 2010

Zadania zamknięte
W zadaniach od 1. do 25. podane były cztery odpowiedzi: A, B, C, D. Zdający wybierał poprawną odpowiedź i zaznaczał ją na karcie odpowiedzi.

Zadanie 1.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej do wskazania zbioru rozwiązań nierówności typu $\left\|x-a\right\| \geq b$	**C**

Zadanie 2.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Modelowanie matematyczne	Wykonywanie obliczeń procentowych	**B**

Zadanie 3.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie w obliczeniach praw działań na potęgach	**A**

Zadanie 4.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie sumy logarytmów	**B**

Zadanie 5.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykonanie dodawania wielomianów	**A**

Zadanie 6.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie prostego równanie wymiernego, prowadzącego do równania liniowego	**D**

Zadanie 7.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Sprawdzenie, czy dana liczba należy do zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej	**D**

Zadanie 8.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytanie współrzędnych wierzchołka paraboli z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej	**B**

Zadanie 9.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Interpretowanie współczynników we wzorze funkcji liniowej	**B**

Zadanie 10.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Odczytywanie wartości funkcji z jej wykresu	**C**

Zadanie 11.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie wyrazów ciągu arytmetycznego	**C**

Zadanie 12.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie wyrazów ciągu geometrycznego	**B**

Zadanie 13.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczania liczby przekątnych wielokąta	**B**

Zadanie 14.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Stosowanie związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego do obliczenia wartości wyrażenia	**A**

Zadanie 15.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznaczanie długości boku kwadratu wpisanego w okrąg	**A**

Zadanie 16.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa do wyznaczenia wysokości tego trójkąta równoramiennego	**B**

Zadanie 17.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Posługiwanie się własnościami figur podobnych do obliczania długości odcinków	**A**

Zadanie 18.

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**	**Poprawna odpowiedź (1 p.)**
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Korzystanie ze związków między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta	**A**

Zadanie 19.

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**	**Poprawna odpowiedź (1 p.)**
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie pola figury płaskiej z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych	**C**

Zadanie 20.

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**	**Poprawna odpowiedź (1 p.)**
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wskazanie współczynnika kierunkowego prostej równoległej do danej prostej	**B**

Zadanie 21.

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**	**Poprawna odpowiedź (1 p.)**
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wskazanie równania okręgu o podanej długości promienia	**D**

Zadanie 22.

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**	**Poprawna odpowiedź (1 p.)**
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczanie odległości punktów na płaszczyźnie	**C**

Zadanie 23.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Obliczanie pola powierzchni wielościanu	A

Zadanie 24.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Obliczanie liczby krawędzi wielościanu	D

Zadanie 25.

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Obliczanie średniej arytmetycznej	D

Zadania otwarte

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą niż przedstawiona w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 26. (0–2)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie nierówności kwadratowej

Rozwiązanie

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:
  $\Delta = 9$

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \qquad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:
  $x_1 + x_2 = 1$ oraz $x_1 \cdot x_2 = -2$
  i stąd $x_1 = -1$, $x_2 = 2$

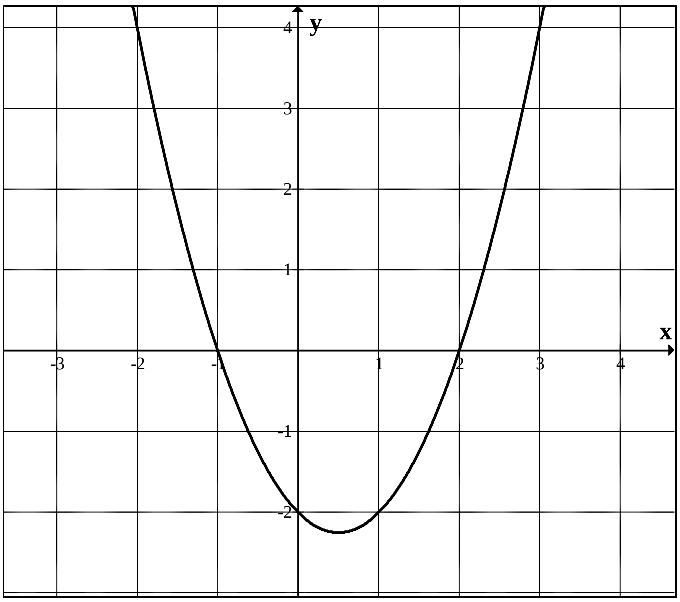
albo

- zapisujemy nierówność w postaci $(x+1)(x-2) \le 0$. Lewą stronę nierówności możemy uzyskać np.:
  - grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,

- o korzystając z postaci kanonicznej
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=\left(x-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right)=(x+1)(x-2),$$
- o podając postać iloczynową

albo

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi



albo

- wskazujemy pierwiastki trójmianu $x_1=-1$, $x_2=2$

Podajemy rozwiązanie nierówności: $-1\le x\le 2$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy wyznaczy pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy

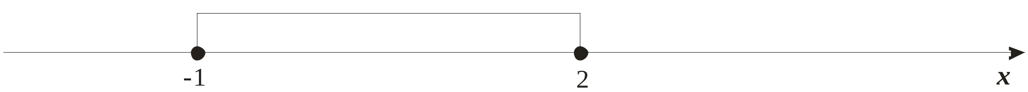
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $-1\le x\le 2$ lub $\langle -1,2\rangle$ lub $x\in\langle -1,2\rangle$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x\ge -1$, $x\le 2$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



Zadanie 27. (0–2)

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązanie równania wielomianowego

I sposób rozwiązania (metoda grupowania)
Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów

$x\left(x^2-4\right)-7\left(x^2-4\right)=0$ lub $x^2\left(x-7\right)-4\left(x-7\right)=0$

$\left(x-7\right)\left(x^2-4\right)=0$

Stąd $x=7$ lub $x=-2$ lub $x=2$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy pogrupuje wyrazy do postaci, z której łatwo można przejść do postaci iloczynowej, np.: $x\left(x^2-4\right)-7\left(x^2-4\right)=0$ lub $x^2\left(x-7\right)-4\left(x-7\right)=0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd
Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=7$ lub $x=-2$ lub $x=2$.

II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3-7x^2-4x+28$. Dzielimy wielomian $x^3-7x^2-4x+28$ przez dwumian $\left(x-2\right)$. Otrzymujemy iloraz $\left(x^2-5x-14\right)$.
Zapisujemy równanie w postaci $\left(x-2\right)\left(x^2-5x-14\right)=0$. Stąd $\left(x-2\right)\left(x+2\right)\left(x-7\right)=0$ i $x=7$ lub $x=-2$ lub $x=2$.

albo

Stwierdzamy, że liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3-7x^2-4x+28$. Dzielimy wielomian $x^3-7x^2-4x+28$ przez dwumian $\left(x+2\right)$. Otrzymujemy iloraz $\left(x^2-9x+14\right)$.
Zapisujemy równanie w postaci $\left(x+2\right)\left(x^2-9x+14\right)=0$. Stąd $\left(x+2\right)\left(x-2\right)\left(x-7\right)=0$ i $x=-2$ lub $x=2$ lub $x=7$.

albo

Stwierdzamy, że liczba 7 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3-7x^2-4x+28$. Dzielimy wielomian $x^3-7x^2-4x+28$ przez dwumian $\left(x-7\right)$. Otrzymujemy iloraz $\left(x^2-4\right)$.
Zapisujemy równanie w postaci $\left(x-7\right)\left(x^2-4\right)=0$. Stąd $\left(x-7\right)\left(x-2\right)\left(x+2\right)=0$ i $x=7$ lub $x=-2$ lub $x=2$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy

- podzieli wielomian $x^3-7x^2-4x+28$ przez dwumian $(x-2)$, otrzyma iloraz $\left(x^2-5x-14\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $x^3-7x^2-4x+28$ przez dwumian $(x+2)$, otrzyma iloraz $\left(x^2-9x+14\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $x^3-7x^2-4x+28$ przez dwumian $(x-7)$, otrzyma iloraz $\left(x^2-4\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- podzieli wielomian $x^3-7x^2-4x+28$ przez trójmian np. $(x-2)(x-7)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy

- wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=2$, $x=-2$, $x=7$

Zadanie 28. (0–2)

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**
Rozumowania i argumentacji	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego składającego się z niewielkiej liczby kroków

Rozwiązanie

Dorysowujemy odcinki *AD* i *BE*. Pokazujemy, że trójkąty *ACD* i *BCE* są przystające:

- $|AC|=|BC|$, bo trójkąt *ABC* jest równoramienny
- $|CD|=|CE|$, bo trójkąt *CDE* jest równoramienny
- $|\sphericalangle ACD| = 90^\circ - |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle BCE|$
- Stosujemy cechę przystawania *bkb*

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy

- napisze, że trójkąty *ACD* i *BCE* są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|AD|=|BE|$

albo

- zapisze, że $|AC|=|BC|$, $|CD|=|CE|$ i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCE$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy poprawnie uzasadni, że trójkąty *ACD* i *BCE* są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|AD|=|BE|$. Wymagamy udowodnienia równości kątów *ACD* i *BCE*.

Zadanie 29. (0–2)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego

I sposób rozwiązania (jedynka trygonometryczna)

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{5}{12} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{5}{12}\cos\alpha \\ \left(\dfrac{5}{12}\cos\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\frac{25}{144}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{144}{169} \quad \text{i} \quad \cos\alpha > 0$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{13}$$

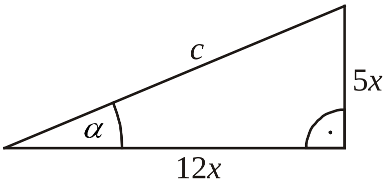
$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{12}{5}\sin\alpha \\ \left(\dfrac{12}{5}\sin\alpha\right)^2 + \sin^2\alpha = 1 \end{cases}$$

$$\frac{144}{25}\sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = \frac{25}{169} \quad \text{i} \quad \sin\alpha > 0$$

$$\sin\alpha = \frac{5}{13} \text{ i stąd } \cos\alpha = \frac{12}{13}$$

II sposób rozwiązania (trójkąt prostokątny)



$$c^2 = (12x)^2 + (5x)^2$$

$$c = 13x$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{13}$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\cos\alpha$ i wykorzysta „jedynkę trygonometryczną”, np. $\sin\alpha = \frac{5}{12}\cos\alpha$, $\frac{25}{144}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\sin\alpha$ i wykorzysta „jedynkę trygonometryczną”, np. $\cos\alpha = \frac{12}{5}\sin\alpha$, $\frac{144}{25}\sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\sin\alpha$ np. $\frac{25}{144} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ lub $25 - 25\sin^2\alpha = 144\sin^2\alpha$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd albo

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\sin\alpha$ i $\text{tg}\alpha$, np. $\text{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ lub $\cos^2\alpha\left(\text{tg}^2\alpha+1\right)=1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym oraz zapisze $\sin\alpha$ i na tym zakończy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym i zapisze $\cos\alpha$

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 12 i 5 (lub ich wielokrotności), obliczy długość przeciwprostokątnej i zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt α

albo

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta α: $\alpha\approx 22^\circ$ (akceptujemy wynik $\alpha\approx 23^\circ$) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy

- obliczy wartość $\cos\alpha$: $\cos\alpha=\frac{12}{13}$

albo

- obliczy przybliżoną wartość $\cos\alpha$: $\cos 22^\circ\approx 0,9272$ lub $\cos 23^\circ\approx 0,9205$

Zadanie 30. (0–2)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Rozumowania i argumentacji	Wykazanie prawdziwości nierówności

<u>I sposób rozwiązania</u>

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny:

$$\frac{a^2+1}{a+1}\ge\frac{a+1}{2}$$
$$2\left(a^2+1\right)\ge\left(a+1\right)^2$$
$$2a^2+2\ge a^2+2a+1$$
$$a^2-2a+1\ge 0$$
$$\left(a-1\right)^2\ge 0$$

co kończy dowód.

$$\frac{a^2+1}{a+1}-\frac{a+1}{2}\ge 0$$
$$\frac{2\left(a^2+1\right)-\left(a+1\right)^2}{2\left(a+1\right)}\ge 0$$
$$\frac{a^2-2a+1}{2\left(a+1\right)}\ge 0$$
$$\frac{\left(a-1\right)^2}{2\left(a+1\right)}\ge 0$$

co kończy dowód.

II sposób rozwiązania

Dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest nierówność $(a-1)^2 \geq 0$.

Przekształcamy tę nierówność w sposób równoważny:

$(a-1)^2 + (a+1)^2 \geq (a+1)^2$

$2a^2 + 2 \geq (a+1)^2$

$2(a^2+1) \geq (a+1)^2$

Ponieważ $a > 0$, więc $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$

co kończy dowód.

III sposób rozwiązania (dowód nie wprost)

Przypuśćmy, że dla pewnego $a > 0$ mamy $\frac{a^2+1}{a+1} < \frac{a+1}{2}$. Przekształcamy tę nierówność tak, jak w I sposobie rozwiązania do postaci, np. $(a-1)^2 < 0$ i stwierdzamy, że otrzymaliśmy sprzeczność.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- otrzyma nierówność $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ lub $\frac{a^2-2a+1}{2(a+1)} \geq 0$ i na tym poprzestanie lub w dalszej części dowodu popełni błąd

albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność $(a-1)^2 < 0$ i nie zapisze żadnych wniosków lub zapisze błędne wnioski

albo

- stosując II sposób rozwiązania otrzyma nierówność $2a^2 + 2 \geq (a+1)^2$ i nie zapisze żadnych wniosków lub zapisze błędne wnioski.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy

- zapisze nierówność $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie a spełniają tę nierówność

albo

- zapisze nierówność $\frac{a^2-2a+1}{2(a+1)} \geq 0$ i uzasadni, że wszystkie liczby dodatnie a spełniają tę nierówność

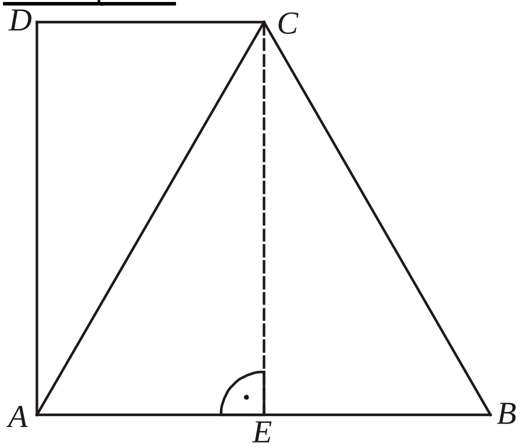
albo

- stosując metodę dowodu nie wprost otrzyma nierówność $(a-1)^2 < 0$ i zapisze, że otrzymana nierówność nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej a.

Zadanie 31. (0–2)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie związków miarowych w trójkącie prostokątnym i równobocznym

Rozwiązanie



Prowadzimy wysokość CE trójkąta równobocznego ABC.
Wówczas $|AE|=3$ i stąd $|CD|=|AE|=3$.
Następnie zapisujemy, że $|BC|=|AB|=6$
oraz $|DA|=|CE|=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.
Stąd obwód trapezu jest równy
$6+6+3+3\sqrt{3}=15+3\sqrt{3}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy

- prawidłowo podzieli trapez na trójkąty i poprawnie obliczy długość krótszej podstawy trapezu ($|DC|=3$) i na tym zakończy lub popełni błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

albo

- prawidłowo podzieli trapez na trójkąty i poprawnie obliczy wysokość trapezu ($h=3\sqrt{3}$) i na tym zakończy lub popełni błędy rachunkowe przy obliczaniu obwodu trapezu

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy obliczy poprawnie obwód trapezu: $15+3\sqrt{3}$.

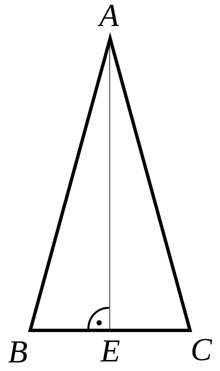
Zadanie 32. (0–4)

Obszar standardów	Sprawdzane umiejętności
Użycie i tworzenie strategii	Obliczanie objętości wielościanu

Uwaga
Strategia rozwiązania tego zadania sprowadza się do realizacji następujących etapów rozwiązania:

- obliczenie długości krawędzi AB lub AC podstawy ostrosłupa bądź wysokości DE ściany bocznej BCD
- zastosowanie poprawnej metody obliczenia pola podstawy i obliczenie tego pola
- obliczenie objętości ostrosłupa

<u>**I sposób rozwiązania**</u> (krawędź podstawy, wysokość *AE* podstawy i „zwykły” wzór na pole trójkąta *ABC*)
Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *ABD* wynika, że $|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = 25$, stąd $|AB| = 5$. Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *ACD* wynika, że $|AC| = 5$.



Rysujemy trójkąt *ABC* i prowadzimy w nim wysokość *AE*. Trójkąt *ABC* jest równoramienny ($|AB| = |AC|$), więc $|BE| = |EC| = 3$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ABE* mamy $|AE|^2 = |AB|^2 - |BE|^2 = 16$, stąd $|AE| = 4$.

Zatem $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$. Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Obliczenie długości krawędzi *AB* lub *AC* podstawy ostrosłupa: $|AB| = 5$, $|AC| = 5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Obliczenie wysokości *AE* trójkąta *ABC*: $|AE| = 4$.

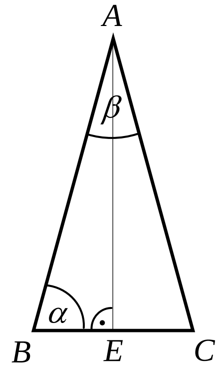
<u>Uwaga</u>
Zdający nie musi uzasadniać, że $|BE| = |EC|$, wystarczy, że poprawnie stosuje twierdzenie Pitagorasa do obliczenia wysokości *AE* trójkąta *ABC*.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABC} = 12$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 48$.

<u>Uwaga</u>
Jeśli zdający przy obliczaniu wysokości trójkąta *ABC* lub pola tego trójkąta (pola podstawy ostrosłupa) nie stosuje poprawnej metody (co przekreśla poprawność strategii rozwiązania zadania), np. przyjmie, że środkowa *CF* trójkąta *ABC* jest jego wysokością, to za całe rozwiązanie przyznajemy co najwyżej **1 punkt** (zdający nie osiągnął istotnego postępu).

<u>II sposób rozwiązania</u> (krawędź podstawy, cosinus jednego z kątów trójkąta *ABC*, wzór z sinusem na pole trójkąta *ABC*)
Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *ABD* wynika, że
$|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = 25$, stąd $|AB| = 5$. Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *ACD* wynika, że $|AC| = 5$.



Rysujemy trójkąt *ABC* i prowadzimy w nim wysokość *AE* i oznaczamy $\alpha = |\sphericalangle ABC|$.

<u>Wariant I obliczenia pola podstawy.</u>
Trójkąt *ABC* jest równoramienny ($|AB| = |AC|$), więc $|BE| = |EC| = 3$.

Stąd $\cos\alpha = \frac{|BE|}{|BA|} = \frac{3}{5}$. Zatem $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$.

Pole trójkąta *ABC* jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|BA|\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{4}{5} = 12$.

<u>Wariant II obliczenia pola podstawy.</u>
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta *ABC* obliczamy $\cos\beta$:

$6^2 = 5^2 + 5^2 - 2\cdot 5\cdot 5\cos\beta$, stąd $\cos\beta = \frac{7}{25}$.

Następnie obliczamy $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$.

Pole trójkąta *ABC* jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AC|\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot\frac{24}{25} = 12$.
Po obliczeniu pola podstawy obliczamy objętość *V* ostrosłupa
$V = \frac{1}{3}\cdot 12\cdot 12 = 48$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Obliczenie długości krawędzi *AB* lub *AC* podstawy ostrosłupa: $|AB| = 5$, $|AC| = 5$.
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Obliczenie sinusa jednego z kątów trójkąta *ABC*: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ lub $\sin\beta = \frac{24}{25}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABC} = 12$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 48$.

<u>Uwaga</u>
Jeśli zdający przy obliczaniu wysokości trójkąta *ABC* lub pola tego trójkąta (pola podstawy ostrosłupa) nie stosuje poprawnej metody (co przekreśla poprawność strategii rozwiązania zadania), np. zapisze, że $\sin\alpha = \frac{|BE|}{|BA|} = \frac{3}{5}$, to za całe rozwiązanie przyznajemy co najwyżej **1 punkt** (zdający nie osiągnął istotnego postępu).

<u>III sposób rozwiązania</u> (krawędź podstawy, wzór Herona na pole trójkąta *ABC*)
Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *ABD* wynika, że $|AB|^2 = |BD|^2 - |AD|^2 = 25$, stąd $|AB| = 5$. Podobnie z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *ACD* wynika, że $|AC| = 5$. Pole trójkąta *ABC* obliczamy ze wzoru Herona

$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie $p = \frac{5+5+6}{2} = 8$, $p-a = 8-6 = 2$,
$p-b = p-c = 8-5 = 3$.
$P_{ABC} = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = 12$.

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot P_{ABC} \cdot |AD| = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$.

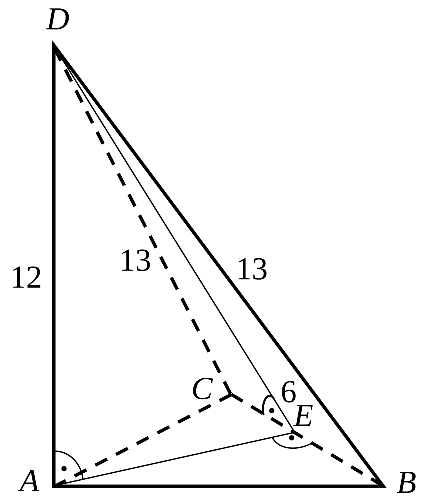
<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Obliczenie długości krawędzi *AB* lub *AC* podstawy ostrosłupa: $|AB| = 5$, $|AC| = 5$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABC} = 12$.

<u>Uwaga</u>
Zdający otrzymuje **2 punkty**, jeśli poprawnie zastosuje wzór Herona, popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pola trójkąta *ABC* i na tym zakończy.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 48$.

IV sposób rozwiązania (wysokość ściany bocznej *BCD*, wysokość *AE* podstawy i „zwykły” wzór na pole trójkąta *ABC*)
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trójkąt *BCD* jest równoramienny, więc środek *E* boku *BC* jest spodkiem wysokości *DE* tego trójkąta. Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta *BED* wynika, że $|DE|^2 = |BD|^2 - |BE|^2 = 13^2 - 3^2 = 160$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *ADE* obliczamy wysokość *AE* trójkąta *ABC*
$|AE|^2 = |DE|^2 - |AD|^2 = 160 - 12^2 = 16$, stąd $|AE| = 4$.

Pole trójkąta *ABC* jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$.

Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 = 48$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Obliczenie wysokości *DE* ściany bocznej *BCD* ostrosłupa (lub kwadratu tej wysokości): $|DE| = 4\sqrt{10}$.

Uwaga
Zdający nie musi uzasadniać, że $|BE| = |EC|$, wystarczy, że poprawnie stosuje twierdzenia Pitagorasa do obliczenia wysokości *DE* trójkąta *BCD*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Obliczenie wysokości *AE* trójkąta *ABC*: $|AE| = 4$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_{ABC} = 12$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 48$.

Zadanie 33. (0–4)

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**
Modelowanie matematyczne	Obliczanie prawdopodobieństwa z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa

Rozwiązanie (model klasyczny)

Ω jest zbiorem wszystkich par (a,b) takich, że $a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Mamy model klasyczny.

$|\Omega| = 36$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(2,6),(4,3),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)$

Zatem $|A| = 6$ i stąd $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ oraz, że $A = \{(2,6),(4,3),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający zapisze, że $|\Omega| = 36$ oraz obliczy $|A| = 6$ i na tym zakończy lub dalej rozwiązuje błędnie.

Uwaga

Jeżeli zdający wypisze bezbłędnie wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A, ale błędnie zapisze ich liczbę (np. $|A| = 5$ albo $|A| = 7$) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje 3 punkty.

Rozwiązanie bezbłędne ....4 pkt

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{1}{6}$

Uwaga

Jeśli zdający ograniczy swoje rozwiązanie do zapisu $|\Omega| = 36$; $|A| = 6$ oraz $P(A) = \frac{1}{6}$, to otrzymuje 1 pkt.

Zadanie 34. (0–5)

Obszar standardów	**Sprawdzane umiejętności**
Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego

Rozwiązanie

Oznaczmy przez x długość (w metrach) basenu w pierwszym hotelu i przez y szerokość (w metrach) tego basenu. Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x\cdot y = 240 \\ (x+5)\cdot(y+2) = 350 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny: $x\cdot y + 2x + 5y + 10 = 350$, podstawiamy do tego równania $x\cdot y = 240$ i wyznaczamy z tak przekształconego równania niewiadomą x: $x = \frac{100-5y}{2}$. Wyznaczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania $\frac{100-5y}{2}\cdot y = 240$, które następnie przekształcamy do postaci:

$y^2 - 20y + 96 = 0$. Rozwiązaniami tego równania są: $y_1 = 8,\ y_2 = 12$.

Zatem:

- jeżeli $y = 8$, to $x = 30$ i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary: $30\text{ m}\times 8\text{ m}$, zaś basen w drugim hotelu: $35\text{ m}\times 10\text{ m}$,
- jeżeli $y = 12$, to $x = 20$ i wtedy basen w pierwszym hotelu ma wymiary: $20\text{ m}\times 12\text{ m}$, zaś basen w drugim hotelu: $25\text{ m}\times 14\text{ m}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wprowadzenie oznaczeń, na przykład: x, y – wymiary basenu w pierwszym hotelu i zapisanie równania $x\cdot y = 240$ albo równania $(x+5)\cdot(y+2) = 350$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y, np.

$$\begin{cases} x\cdot y = 240 \\ (x+5)\cdot(y+2) = 350 \end{cases}$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może od razu zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y, np:

$$(x+5)\cdot\left(\frac{240}{x}+2\right) = 350 \quad \text{albo} \quad \left(\frac{240}{y}+5\right)\cdot(y+2) = 350$$

Rozwiązanie prawie całkowite.. 4 pkt

Doprowadzenie równania wymiernego do równania kwadratowego oraz rozwiązanie równania kwadratowego:

$$x^2 - 50x + 600 = 0,\ \text{skąd}\ x = 20\ \text{lub}\ x = 30$$

albo

$$y^2 - 20y + 96 = 0 \text{, skąd } y = 8 \text{ lub } y = 12$$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Zdający popełnia błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania (ale otrzymuje dwa rozwiązania) i konsekwentnie do popełnionego błędu oblicza wymiary obu basenów.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Zapisanie wymiarów obu basenów:

Basen w pierwszym hotelu ma wymiary $30 \text{ m} \times 8 \text{ m}$ i w drugim hotelu $35 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ lub basen w pierwszym hotelu ma wymiary $20 \text{ m} \times 12 \text{ m}$ i w drugim $25 \text{ m} \times 14 \text{ m}$.