II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia trzeciego)

10 marca 2007 r.

1. Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:

$$\begin{cases} ab=a+b \\ bc=b+c \\ ca=c+a \end{cases}$$

2. Każdemu wierzchołkowi 100-kąta foremnego trzeba przyporządkować pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest takie przyporządkowanie, w którym każda liczba jest równa wartości bezwzględnej różnicy liczb, które z nią sąsiadują? Odpowiedź uzasadnij.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC. Wysokość trójkąta ABC poprowadzona z wierzchołka C przecina odcinek MN w punkcie D. Symetralna boku AB przecina odcinek MN w punkcie E. Wykaż, że $MD=NE$.

4. Ile jest takich liczb n należących do zbioru $\{1,2,\ldots,2007\}$, dla których liczba n^4-1 jest podzielna przez 9? Odpowiedź uzasadnij.

5. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym? Odpowiedź uzasadnij.