Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

poziom rozszerzony

4 marca 2023

Czas pracy: 180 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony dla $n \geqslant 0$, którego iloraz jest równy $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $51(\sqrt{3}+1)$. Oblicz a_5.

ZADANIE 2 (3 PKT)

Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $y = \frac{x-2}{(1-2x)^2}$ w punkcie $x_0 = 1$.

ZADANIE 3 (4 PKT)

Wiedząc, że $a = \log_2 18$ i $b = \log_2 15$ oblicz $\log_3 360$.

Zadanie 4 (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2-(m+5)x+m^2+9m+20=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunek

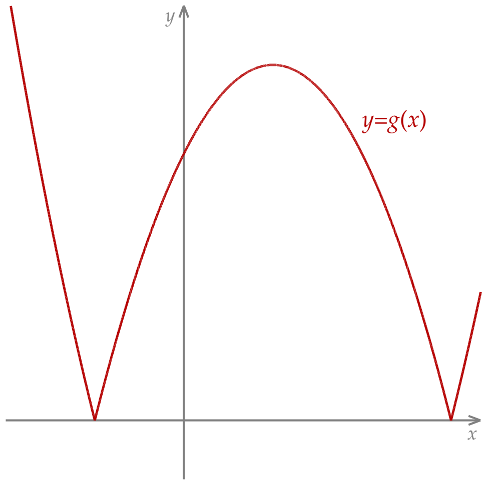
$$x_1^3+x_2^3>5x_1^2\cdot x_2+5x_1\cdot x_2^2.$$

ZADANIE 5 (3 PKT)

Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest podzielna przez 9.

Informacja do zadań 6.1 i 6.2

Funkcja g jest określona wzorem $g(x) = \left|-\frac{1}{3}x^2 + 2x + 9\right|$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Fragment wykresu funkcji g w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) przedstawiono na rysunku (jednostki pominięto).



ZADANIE 6.1 (2 PKT)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości, jakie funkcja g przyjmuje w przedziale $[2, 11]$.

ZADANIE 6.2 (2 PKT)

Wyznacz zbiór wszystkich wartości parametru m, dla których równanie $g(x) = |m|$ ma dokładnie dwa rozwiązania dodatnie.

ZADANIE 7 (5 PKT)

Rozwiąż równanie

$$\sin 2x + 2\sin^2 x = 2 + \sqrt{6}\cos x$$

w przedziale $[-\pi, \pi]$.

ZADANIE 8 (3 PKT)

Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $|AB| = a$ i $|CD| = b$, przy czym $a > b$. Udowodnij, że odcinek łączący środki przekątnych tego trapezu ma długość $\frac{a-b}{2}$.

Zadanie 9 (4 pkt)

W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 4 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny i przekładamy ją do drugiej urny. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dwie kule wylosowane z drugiej urny są w różnych kolorach.

ZADANIE 10 (6 PKT)

Punkty $A = (-2, -4)$ i $B = (11, -2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C tego trójkąta leży na prostej $y = 2x + 14$, a dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie $D = \left(\frac{7}{3}, -\frac{10}{3}\right)$. Oblicz współrzędne wierzchołka C trójkąta ABC.

Zadanie 11 (7 pkt)

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne ABC ($|AB| = |AC|$), na których opisano okrąg o promieniu $R = 2$. Niech d oznacza długość ramienia AB trójkąta.

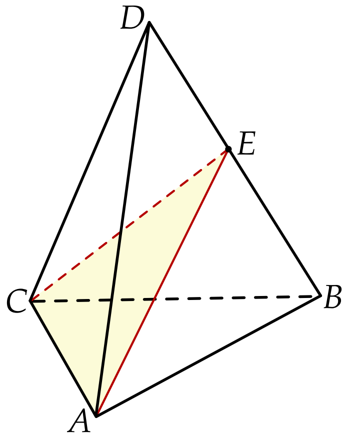
a) Wykaż, że pole P każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości d, wyraża się wzorem $P(d) = \frac{1}{16}d^3\sqrt{16-d^2}$.

b) Wyznacz dziedzinę funkcji P.

c) Oblicz długość ramienia d tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole. Oblicz to największe pole.

ZADANIE 12 (4 PKT)

Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α. Przez krawędź podstawy tego ostrosłupa poprowadzono płaszczyznę, która jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod katem β, i która przecina przeciwległą krawędź ostrosłupa (zobacz rysunek).



Oblicz stosunek pola powierzchni otrzymanego przekroju do pola powierzchni podstawy ostrosłupa jeżeli wiadomo, że $5\sin\alpha = 4\sin(\alpha+\beta)$.