# PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

14 KWIETNIA 2018

CZAS PRACY: 180 MINUT

## Zadania zamknięte

### ZADANIE 1 (1 PKT)

Równanie $||x-1|-3| = 4$ ma dokładnie

A) dwa rozwiązania rzeczywiste.
B) jedno rozwiązanie rzeczywiste.
C) cztery rozwiązania rzeczywiste.
D) trzy rozwiązania rzeczywiste.

### ZADANIE 2 (1 PKT)

Granica $\lim\limits_{x\to -2} \frac{9}{\frac{3}{x-2}-\frac{27}{x^3}+\frac{7}{x+2}}$

A) jest równa $-\infty$ B) jest równa $+\infty$ C) nie istnieje D) jest równa 0

### ZADANIE 3 (1 PKT)

Liczba 17! jest podzielna przez

A) 71 B) 61 C) 51 D) 41

### ZADANIE 4 (1 PKT)

Dane są punkty $A=(-3,4)$ i $B=(-13,9)$. Punkt $C$ należący do odcinka $AB$ i taki, że $AC = \frac{1}{4}CB$ ma współrzędne

A) $C=(-10,5)$ B) $C=(-2,1)$ C) $C=(-7,6)$ D) $C=(-5,5)$

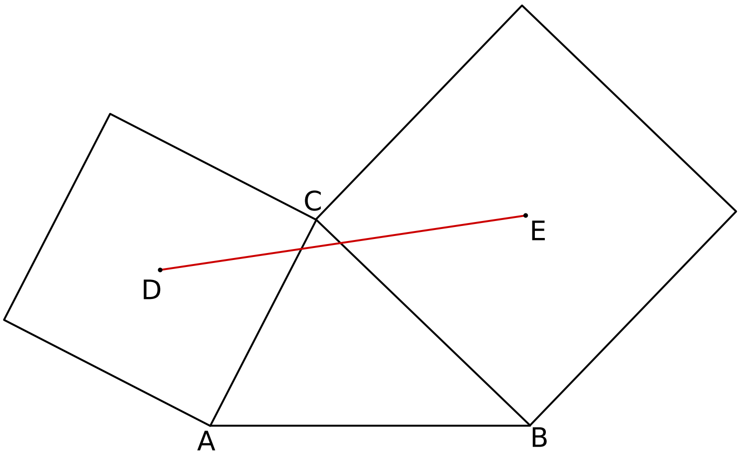
### ZADANIE 5 (1 PKT)

Funkcja $f$ jest określona wzorem $f(x) = \frac{x}{3x+6}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -2$. Wówczas pochodna tej funkcji dla argumentu $x = \sqrt{2}-2$ jest równa

A) $\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $-1$ D) $\frac{2}{3}$

## ZADANIE 6 (3 PKT)

Pole trójkąta $ABC$ jest równe $S$, a długości jego boków $AC$ i $BC$ są odpowiednio równe $b$ i $a$. Na bokach $AC$ i $BC$ zbudowano kwadraty o środkach odpowiednio $D$ i $E$.




Wykaż, że

$$DE^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + 2S.$$

ZADANIE 7 (3 PKT)

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$, dla których

$$\cos\frac{x}{3} + \left(\cos\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{x}{3}\right)^3 + \cdots = 1.$$

ZADANIE 8 (3 PKT)

Udowodnij, że jeżeli $a, b \geqslant 0$, to prawdziwa jest nierówność $\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

ZADANIE 9 (3 PKT)

Na bokach $AB$, $BC$ i $CA$ trójkąta $ABC$ wybrano odpowiednio punkty $D, E$ i $F$. Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach $ADF$, $BED$ i $CFE$ przecinają się w jednym punkcie.

## ZADANIE 10 (4 PKT)

Ciąg $(a_n)$ jest określony rekurencyjnie w następujący sposób

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 3 \quad \text{dla } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Oblicz ile wyrazów tego ciągu jest mniejszych niż 2018.

ZADANIE 11 (4 PKT)

Wykaż, że

$$\frac{1-\cos^2\frac{3\pi}{5}}{(\cos\frac{3\pi}{5}-1)^2}=\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{5}.$$

## ZADANIE 12 (4 PKT)

Spośród liczb naturalnych sześciocyfrowych wybieramy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo wybrania liczby, której iloczyn cyfr jest podzielny przez 9, jeżeli wiadomo, że każda cyfra wylosowanej liczby jest większa od 1?

ZADANIE 13 (4 PKT)

Wykaż, że punkt o współrzędnych $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{46}-4\sqrt{2}}{2}\right)$ jest wierzchołkiem kwadratu opisanego na okręgu o równaniu

$$x^2 + y^2 - 2x\sqrt{2} + 4y\sqrt{2} + 2 = 0.$$

## ZADANIE 14 (4 PKT)

Na środkowej $AD$ podstawy $ABC$ ostrosłupa trójkątnego $ABCS$ wybrano punkty $E$ i $F$ w ten sposób, że $|AE| = |EF| = |FD|$. Przez punkty $E$ i $F$ poprowadzono płaszczyzny równoległe do ściany $SBC$. Oblicz stosunek pól otrzymanych w ten sposób przekrojów ostrosłupa.

## ZADANIE 15 (6 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości parametru $m$, dla których równanie

$$x^3 + (m-1)x - m = 0$$

ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste. Dla otrzymanych wartości $m$ wyznacz te pierwiastki.

## ZADANIE 16 (7 PKT)

Rozpatrujemy prostokąty $ABCD$, których dwa wierzchołki leżą na osi $Oy$, jeden wierzchołek leży na paraboli określonej równaniem $y = \frac{9}{4}x^2 + 1$, jeden wierzchołek leży na wykresie funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ określonej dla $x \geqslant 0$. Oblicz pole tego z tych prostokątów, który ma najmniejszy możliwy obwód.