PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

17 KWIETNIA 2010

CZAS PRACY: 180 MINUT

Zadanie 1 (3 pkt.)

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$, a krawędź boczna SA jest jego wysokością. Wykaż, że suma kwadratów pól ścian ABS i BCS jest równa sumie kwadratów pól ścian ADS i DCS.

ZADANIE 2 (4 PKT.)

Rozwiąż równanie $\log(1+(x^2-2x)^2)+|4-|5-|3-x|||=0$.

ZADANIE 3 (3 PKT.)

Wykaż, że jeżeli $\sin\alpha - \cos\alpha$ jest liczbą wymierną to wymierna jest również liczba $\cos 4\alpha$.

ZADANIE 4 (5 PKT.)

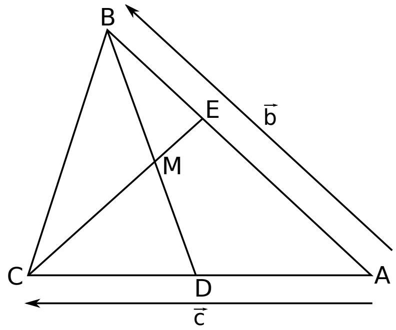
Przekątne czworokąta $ABCD$ są prostopadłe.

a) Wykaż, że sumy kwadratów przeciwległych boków tego czworokąta są równe.

b) Wykaż, że jeżeli długości jego boków AB, BC, CD, DA są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego to czworokąt ten jest rombem.

ZADANIE 5 (5 PKT.)

Na bokach AB i AC trójkąta ABC wybrano punkty E i D w ten sposób, że $|AE| = 2|EB|$ i $|AD| = |DC|$. Punkt M jest punktem wspólnym odcinków CE i BD.



a) Przedstaw każdy z wektorów $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ oraz $\overrightarrow{CE}$ w postaci $p \cdot \vec{b} + q \cdot \vec{c}$, gdzie $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ oraz $p, q \in \mathbb{R}$.

b) Korzystając z równości $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM}$ oblicz w jakim stosunku punkt M dzieli odcinki BD i CE.

ZADANIE 6 (5 PKT.)

Wyznacz wszystkie wartości parametrów a, b, dla których nierówność

$$(x^2 - x - 2)(x^2 - 2ax + 3bx - 6ab) \geqslant 0$$

jest spełniona przez każdą liczbę rzeczywistą.

ZADANIE 7 (6 PKT.)

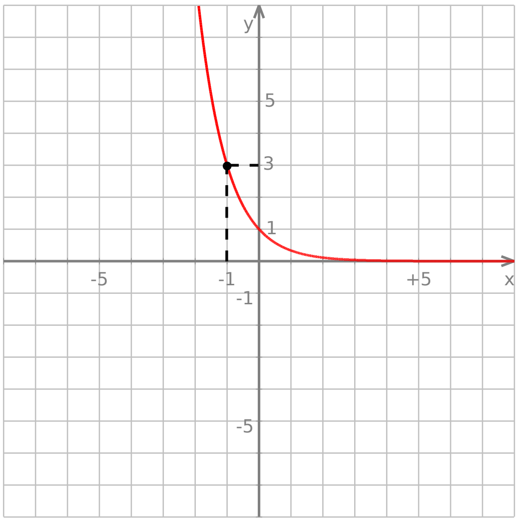
Dany jest czworokąt $ABCD$, gdzie $A = (-1,4), B = (-3,-1), C = (2,-2), D = (1,2)$.

a) Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

b) Oblicz wartość wyrażenia $\left(\frac{\sin\measuredangle DBC}{\sin\measuredangle BCD}\right)^2 + \left(\frac{\sin\measuredangle DBA}{\sin\measuredangle BAD}\right)^2$.

ZADANIE 8 (6 PKT.)

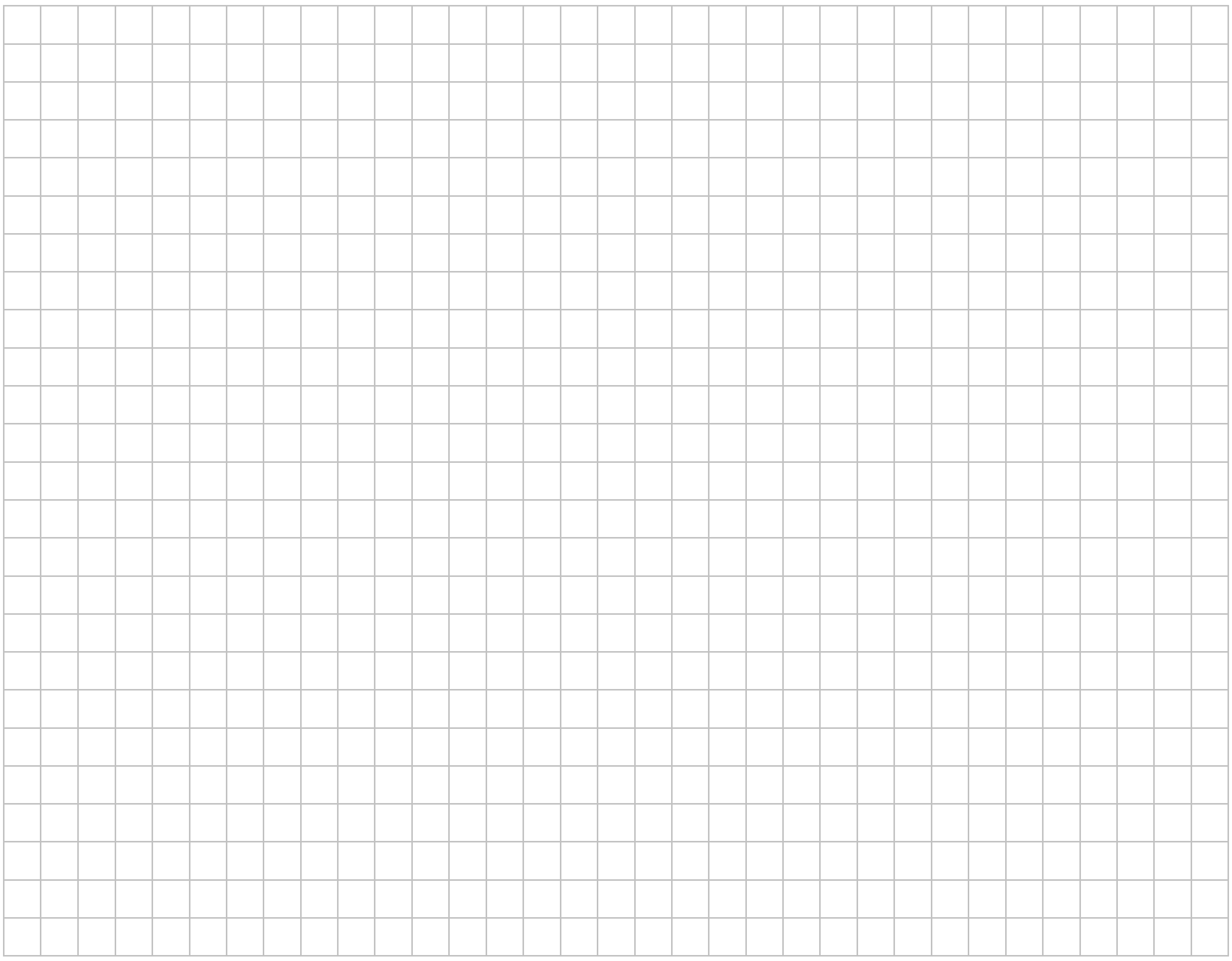
Na rysunku przedstawiono wykres pewnej funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla $x \in \mathbb{R}$.



Wykres ten przekształcono w symetrii środkowej względem punktu $(1, -1)$, a następnie w symetrii osiowej względem prostej $x = -2$. Otrzymano w ten sposób wykres funkcji $g(x) = b \cdot a^x + c$.

a) Wyznacz liczby a, b, c i naszkicuj wykres funkcji $y = g(x)$.

b) Odczytaj z wykresu rozwiązanie nierówności $g(x) \leqslant -5$.



ZADANIE 9 (5 PKT.)

Odległość środka wysokości stożka od jego powierzchni bocznej jest trzy razy mniejsza niż promień jego podstawy. Oblicz sinus kąta rozwarcia stożka.

ZADANIE 10 (3 PKT.)

Uzasadnij, że liczba $\frac{27^{318}-1}{9^{53}-1}$ jest liczbą całkowitą.

ZADANIE 11 (5 PKT.)

Do 12 ponumerowanych szuflad wkładamy losowo 13 pojedynczych skarpetek, przy czym dokładnie dwie z nich tworzą parę. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania konfiguracji, w której żadna szuflada nie jest pusta oraz skarpetki tworzące parę znajdują się w różnych szufladach.