CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD	PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to
E-100.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2015*

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
EMAP-R0-**100**-2406

DATA: **11 czerwca 2024 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**
CZAS TRWANIA: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

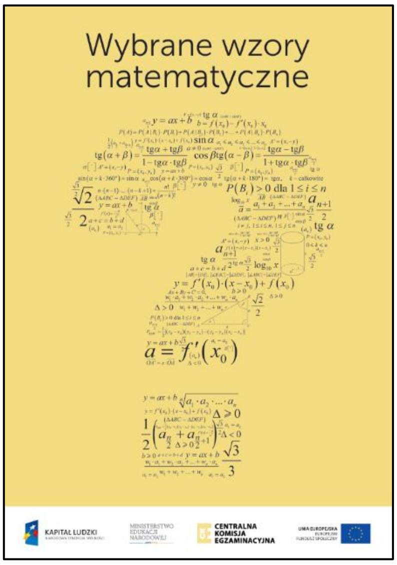
Uprawnienia zdającego do:
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ nieprzenoszenia odpowiedzi na kartę.

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 30 stron (zadania 1–15). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem i zaznacz właściwe.
4. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $81^{\frac{3\cdot\log 6}{\log 27}}$ jest równa

A. 6561 **B.** $3^{\frac{8}{3}}$ **C.** 1296 **D.** $3^{4\cdot\log 189}$

Zadanie 2. (0–1)

Liczba $\left(2-4\sqrt{3}\right)^3-\left(2+4\sqrt{3}\right)^3$ jest równa

A. $(-128\sqrt{3})$ **B.** $\left(-384\sqrt{3}\right)$ **C.** $\left(-1184\sqrt{3}\right)$ **D.** $\left(-480\sqrt{3}\right)$

Zadanie 3. (0–1)

W trójkącie ABC bok AB ma długość $4\sqrt{6}$. Ponadto $|\sphericalangle BAC|=\alpha$, $|\sphericalangle ABC|=\beta$ oraz $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Długość okręgu opisanego na trójkącie ABC jest równa

A. 14π **B.** $14\sqrt{6}\pi$ **C.** 49π **D.** $\frac{14\sqrt{6}}{5}\pi$

Zadanie 4. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=2x^3+4x^2-9$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Prosta o równaniu $y=ax+b$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $P=(-2,-9)$. Współczynnik a w równaniu tej stycznej jest równy

A. 8 **B.** (-2) **C.** (-1) **D.** (-11)

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 5. (0–2)

Granica

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{15n+24}{2\cdot\sqrt{3n^2+4n-2}}$$

istnieje i jest skończona. Oblicz tę granicę.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 6. (0–3)

Doświadczenie losowe polega na dziesięciokrotnym rzucie symetryczną monetą.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tym doświadczeniu losowym orzeł wypadł dokładnie trzy razy z rzędu, jeśli wiadomo, że wypadł dokładnie trzy razy.

Zadanie 7. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $a + b = 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$$

Zadanie 8. (0–3)

Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe a oraz b, przy czym $a > b$. W ten trapez można wpisać okrąg.

Wykaż, że pole tego trapezu jest większe od $a \cdot b$.

Kolejne zadania egzaminacyjne są wydrukowane na następnych stronach.

Zadanie 9. (0–4)

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.
Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych jest równa 16, tj.

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ \ldots = 16$$

Ponadto $a_1 + a_3 = \frac{5}{2} \cdot a_2$.

Wyznacz wzór ogólny na n–ty wyraz ciągu (a_n).

Zadanie 10. (0–4)

W okrąg o promieniu 4 wpisano trójkąt ABC. Długość boku AB jest równa 6. Bok BC ma długość $4\sqrt{3}$ i jest najdłuższym bokiem tego trójkąta.
Oblicz długość boku AC trójkąta ABC.

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

Zadanie 12. (0–4)

Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa a.
Sinus kąta między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka graniastosłupa jest równy $\frac{\sqrt{11}}{6}$.
Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Zadanie 13. (0–6)

Prosta o równaniu $3x + y + 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 - 2x - 8$ w punktach A oraz B, które są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wierzchołek A ma pierwszą współrzędną ujemną. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i ma pierwszą współrzędną dodatnią. Odległość punktu C od prostej zawierającej bok AB równoległoboku jest równa $\frac{9\sqrt{10}}{5}$.

Oblicz długość boku BC tego równoległoboku.

Zadanie 14. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(3-m)\cdot x^2+(m+1)\cdot x-(m+1)^2=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 , x_2 spełniające warunek

$$x_1^2+x_2^2=x_1\cdot x_2+7$$

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w których każda z przekątnych ma długość 10. Niech x oznacza długość odcinka łączącego środki ramion trapezu.

a) Wykaż, że pole P trapezu jako funkcja długości x odcinka łączącego środki ramion trapezu jest określone wzorem

$$P(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$$

b) Wyznacz dziedzinę funkcji $P(x)$.

c) Oblicz długość x odcinka łączącego środki ramion tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe. Oblicz to największe pole.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)