PRÓBNY EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

ZESTAW PRZYGOTOWANY PRZEZ SERWIS

WWW.ZADANIA.INFO

POZIOM ROZSZERZONY

21 KWIETNIA 2018

CZAS PRACY: 180 MINUT

Zadania zamknięte

ZADANIE 1 (1 PKT)

Liczba $\log_3 6 + \log_9 16$ jest równa

A) $\log_3 96$ B) $\log_3 12$ C) $\log_3 24$ D) $\log_3 54$

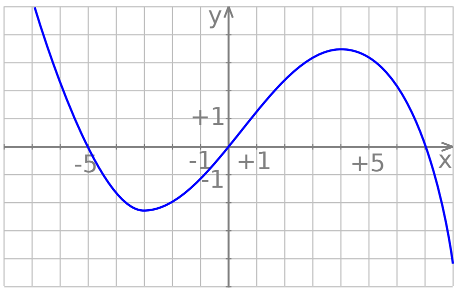
ZADANIE 2 (1 PKT)

Nieskończony ciąg liczbowy jest określony wzorem $a_n = \frac{n^2\cdot\sqrt{3n+n^3}}{(\sqrt{2n}+\sqrt{6})^3}$ dla $n \geqslant 1$. Wtedy

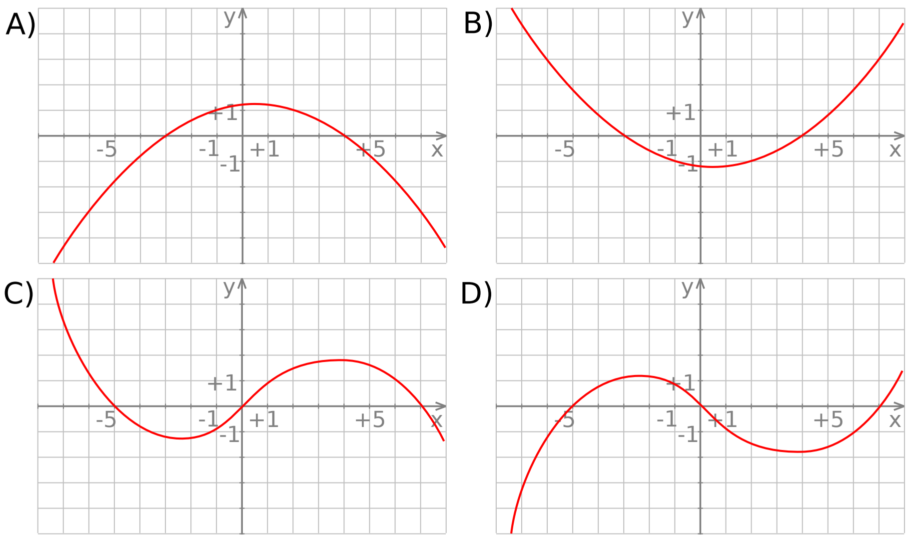
A) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ B) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ C) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ D) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

ZADANIE 3 (1 PKT)

Rysunek przedstawia wykres funkcji $y = f(x)$.

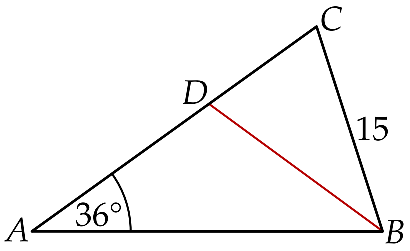


Wskaż wykres funkcji $y = f'(x)$.



ZADANIE 4 (1 PKT)

W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie BC dane są: $|BC| = 15$ oraz $|\measuredangle BAC| = 36^\circ$. Odcinek BD jest odcinkiem dwusiecznej kąta ABC (zobacz rysunek).



Wówczas długość odcinka AD jest równa

A) $|AD| = 15$ B) $|AD| = 16$ C) $|AD| = 6\sqrt{5}$ D) $|AD| = 8\sqrt{5}$

ZADANIE 5 (1 PKT)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny, w którym iloraz jest trzy razy mniejszy od pierwszego wyrazu, a suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa $\frac{1}{2}$. Pierwszy wyraz tego ciągu jest równy

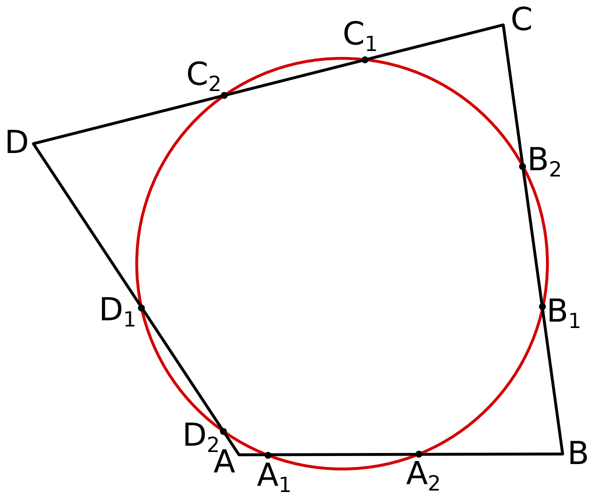
A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{1}{7}$ C) $\frac{7}{3}$ D) 7

ZADANIE 6 (2 PKT)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P = (-1, 0)$.

ZADANIE 7 (3 PKT)

Okrąg przecina boki czworokąta $ABCD$ kolejno w punktach $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2$ (zobacz rysunek).



Wykaż, że jeżeli $|A_1A_2| = |B_1B_2| = |C_1C_2| = |D_1D_2|$, to w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

ZADANIE 8 (3 PKT)

Oblicz jaka może być najmniejsza możliwa długość boku BC trójkąta ABC jeżeli $|\measuredangle BAC| = \alpha$ i pole trójkąta ABC jest równe S.

ZADANIE 9 (3 PKT)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $\left|\frac{1}{2^x}-\frac{9}{10}\right|+m=3$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i rozwiązanie to jest liczbą dodatnią. Wyznacz to rozwiązanie.

ZADANIE 10 (3 PKT)

Udowodnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych $x \geqslant 1$ i $y \geqslant 1$ prawdziwa jest nierówność

$$x(x^2 - 2x + 3) + y(y^2 - 2y + 3) \geqslant 2xy + 2.$$

ZADANIE 11 (4 PKT)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{16}$ należące do przedziału $\langle 0, \pi \rangle$.

ZADANIE 12 (4 PKT)

Suma 2018 początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) jest równa 1417, a suma odwrotności tych wyrazów jest równa 109. Oblicz iloczyn 2018 początkowych wyrazów ciągu (a_n).

ZADANIE 13 (5 PKT)

Napisz równanie okręgu o środku $P = (-2,-7)$, którego punkty wspólne z okręgiem o równaniu $x^2 - 8x + y^2 + 2y + 7 = 0$ są końcami odcinka o długości $4\sqrt{2}$.

ZADANIE 14 (5 PKT)

Z cyfr 0, 1, 2 tworzymy sześciocyfrowe liczby całkowite dodatnie podzielne przez 60. Oblicz, ile możemy utworzyć takich liczb.

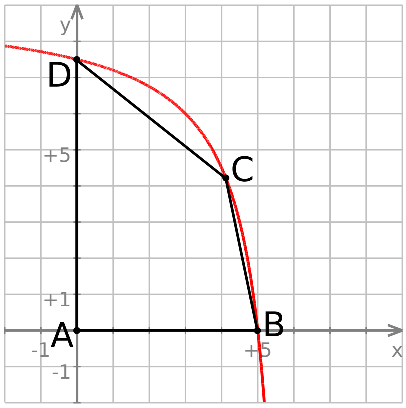
ZADANIE 15 (6 PKT)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, a krawędź podstawy ma długość a. Przez krawędź podstawy poprowadzono płaszczyznę tworzącą z płaszczyzna podstawy kąt $\beta \in (0, \alpha)$. Wykaż, że pole otrzymanego przekroju jest równe

$$\frac{a^2 \sin^2 \alpha \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}.$$

ZADANIE 16 (7 PKT)

Na rysunku poniżej przedstawiono fragment wykresu funkcji $f(x) = \frac{9x-45}{x-6}$ określonej dla $x \in (-\infty, 6)$. Wykres ten przecina osie Ox i Oy odpowiednio w punktach B i D, a punkt A jest początkiem układu współrzędnych. Rozpatrujemy wszystkie czworokąty $ABCD$, w których punkt C leży na wykresie funkcji $y = f(x)$ pomiędzy punktami B i D.



Oblicz współrzędne wierzchołka C tego z rozpatrywanych czworokątów, którego pole jest największe.