III Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
(zawody stopnia trzeciego)
8 marca 2008 r.

Szkice rozwiązań

---

1. Dane są takie liczby rzeczywiste a, b, c, że liczby $ab+bc$, $bc+ca$, $ca+ab$ są dodatnie. Udowodnij, że liczby a, b, c mają jednakowy znak, tzn. wszystkie są dodatnie lub wszystkie są ujemne.

Rozwiązanie
Zauważmy, że żadna z liczb nie może być równa 0; w przeciwnym razie któraś z liczb $ab+bc$, $bc+ca$, $ca+ab$ byłaby równa 0.
Jeśli nie wszystkie spośród liczb a, b, c mają jednakowy znak, to albo
(1) dwie spośród liczb a, b, c są dodatnie, a trzecia ujemna, albo
(2) dwie spośród liczb a, b, c są ujemne, a trzecia dodatnia.
Rozpatrzmy przypadek (1). Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a,b>0$ oraz $c<0$. Wtedy jednak $bc+ca<0$, co stoi w sprzeczności z założeniami treści zadania.
Analogicznie rozumujemy w przypadku (2): Jeśli $a,b<0$ oraz $c>0$, to $bc+ca<0$, co przeczy warunkom zadania.

---

2. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek (a,b,c) dodatnich liczb całkowitych spełniających równość $a^3+3b^6=c^2$.

Rozwiązanie
Zauważmy, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n,
$$(n^2)^3+3n^6=4n^6=(2n^3)^2.$$
Stąd wynika, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, trójka liczb $(a,b,c)=(n^2,n,2n^3)$ jest rozwiązaniem danego równania.

---

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC>BC$. Punkt P jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta ACB. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wiedząc, że $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, oblicz długość odcinka PM.

Rozwiązanie
Oznaczmy przez Q punkt przecięcia prostych AC i BP. Wówczas w trójkącie BQC dwusieczna kąta przy wierzchołku C pokrywa się z wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka C. Wobec tego $CQ=CB=a$ oraz $BP=PQ$. Ponadto $AM=MB$. Stąd wynika, że $PM=\frac{1}{2}AQ$. Zatem
$$PM=\tfrac{1}{2}AQ=\tfrac{1}{2}(AC-CQ)=\tfrac{1}{2}(b-a).$$

---

4. Czy wierzchołki 20-kąta foremnego można tak ponumerować liczbami $1,2,\ldots,20$, aby użyć wszystkich tych liczb oraz aby dla każdych czterech kolejnych wierzchołków suma ich numerów była mniejsza od 43? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie
Odpowiedź: Takie ponumerowanie nie istnieje.
Załóżmy, że kolejne wierzchołki 20-kąta foremnego są ponumerowane liczbami $a_1,a_2,\ldots,a_{20}$. Wtedy
$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} a_1+a_2+a_3+a_4&\leqslant 42\\ a_2+a_3+a_4+a_5&\leqslant 42\\ a_3+a_4+a_5+a_6&\leqslant 42\\ &\cdots\\ a_{19}+a_{20}+a_1+a_2&\leqslant 42\\ a_{20}+a_1+a_2+a_3&\leqslant 42\end{aligned}$$
Dodając nierówności (1) stronami uzyskujemy zależność $4\cdot(a_1+a_2+\ldots+a_{20})\leqslant 20\cdot 42$, która z kolei jest równoważna nierówności $4\cdot(1+2+\ldots+20)\leqslant 20\cdot 42$, czyli $840\leqslant 840$.
Wobec tego aby rozpatrywane ponumerowanie istniało, w nierównościach (1) muszą zachodzić równości. Stąd w szczególności uzyskujemy $a_1+a_2+a_3+a_4=a_2+a_3+a_4+a_5$, czyli $a_1=a_5$. Otrzymaliśmy sprzeczność, gdyż wszystkie liczby $a_1,a_2,\ldots,a_{20}$ są różne.

---

5. Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego każda krawędź ma długość 1. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przecinającą jego wszystkie krawędzie boczne i uzyskano w przekroju czworokąt wypukły $ABCD$ nie będący trapezem. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Wyznacz wszystkie wartości, jakie może przyjąć odległość punktu P od płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez S wierzchołek danego ostrosłupa. Prosta AB leży w płaszczyźnie ABS, a prosta CD leży w płaszczyźnie CDS. Zatem punkt wspólny prostych AB i CD musi leżeć w części wspólnej płaszczyzn ABS i CDS, którą jest prosta przechodząca przez punkt S i równoległa do płaszczyzny podstawy danego ostrosłupa. Tak więc, niezależnie od wyboru płaszczyzny $ABCD$, odległość punktu P od płaszczyzny podstawy danego ostrosłupa jest równa wysokości H tego ostrosłupa. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy:

$$H^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{skąd} \quad H = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$