CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD	PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **M-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny *Formuła 2023*

MATEMATYKA
Poziom rozszerzony

Symbol arkusza
MMAP-R0-100-2406

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:
☐ dostosowania zasad oceniania.

DATA: **11 czerwca 2024 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS TRWANIA: **180 minut**

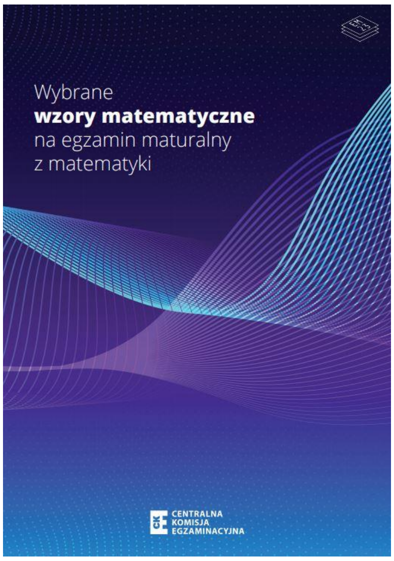
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 31 stron (zadania 1–13). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



Zadania egzaminacyjne są wydrukowane
na następnych stronach.

Zadanie 1. (0–2)

W chwili początkowej ($t = 0$) zainicjowano pewną reakcję chemiczną, w której brał udział związek A.

W wyniku tej reakcji masa m związku A zmieniała się w czasie zgodnie z zależnością

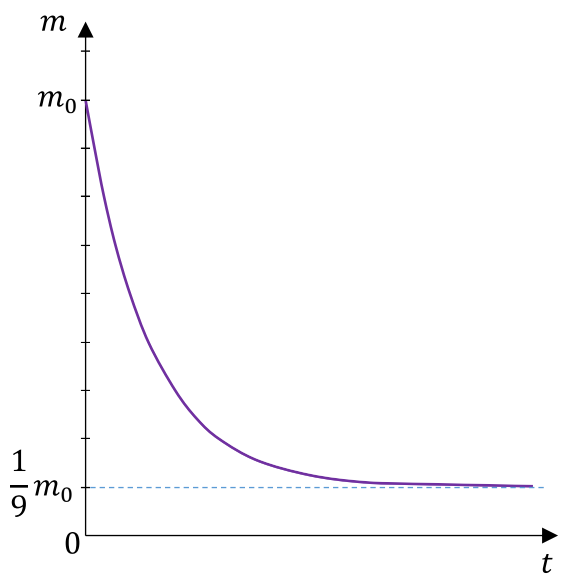
$$m(t) = a \cdot 2^{-0,05 \cdot t} + b \quad \text{dla} \quad t \geq 0$$

gdzie:

m – masa związku A wyrażona w gramach,
t – czas wyrażony w sekundach (liczony od chwili $t = 0$),
a, b – współczynniki liczbowe.

Masa początkowa związku A (tj. masa w chwili $t = 0$) była równa m_0 gramów.

Po osiągnięciu stanu równowagi (tj. gdy $t \to \infty$) masa tego związku była równa $\frac{1}{9}$ jego masy początkowej (zobacz rysunek).



Oblicz, po ilu sekundach (licząc od chwili zainicjowania tej reakcji) przereagowało $87,5\ \%$ masy początkowej tego związku. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–2)

Oblicz granicę

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{|x-3|}{x^2-9}$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 4$.
W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkt $P = (x_0, 5)$ należy do wykresu funkcji f.

Oblicz x_0 oraz wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P.
Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0–3)

Doświadczenie losowe polega na dziesięciokrotnym rzucie symetryczną monetą.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tym doświadczeniu losowym orzeł wypadł dokładnie trzy razy z rzędu, jeśli wiadomo, że wypadł dokładnie trzy razy. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $a + b = 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$$

Zadanie 6. (0–3)

Długości podstaw trapezu równoramiennego są równe a oraz b, przy czym $a > b$. W ten trapez można wpisać okrąg.

Wykaż, że pole tego trapezu jest większe od $a \cdot b$.

Zadanie 7. (0–4)

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych jest równa 16, tj.

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ \dots = 16$$

Ponadto $a_1 + a_3 = \frac{5}{2} \cdot a_2$.

Wyznacz wzór ogólny na n–ty wyraz ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–4)

W okrąg o promieniu 4 wpisano trójkąt ABC. Długość boku AB jest równa 6. Bok BC ma długość $4\sqrt{3}$ i jest najdłuższym bokiem tego trójkąta.

Oblicz długość boku AC trójkąta ABC. Zapisz obliczenia.

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 10. (0–4)

Długość krawędzi podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa a.
Sinus kąta między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z jednego wierzchołka graniastosłupa jest równy $\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Wyznacz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta o równaniu $3x + y + 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = x^2 - 2x - 8$ w punktach A oraz B, które są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wierzchołek A ma pierwszą współrzędną ujemną. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i ma pierwszą współrzędną dodatnią. Odległość punktu C od prostej zawierającej bok AB równoległoboku jest równa $\frac{9\sqrt{10}}{5}$.

Oblicz długość boku BC tego równoległoboku. Zapisz obliczenia.

Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(3-m)\cdot x^2+(m+1)\cdot x-(m+1)^2=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 , x_2 spełniające warunek

$$x_1^2+x_2^2=x_1\cdot x_2+7$$

Zapisz obliczenia.

Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie ostrosłupy prawidłowe trójkątne, w których suma wysokości H ostrosłupa oraz promienia R okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa jest równa 6.

Zadanie 13.1. (0–2)

Wykaż, że objętość V każdego z takich ostrosłupów w zależności od długości R promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa jest określona wzorem

$$\boldsymbol{V(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)}$$

Zadanie 13.2. (0–4)

Objętość V ostrosłupa w zależności od długości R promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa jest określona wzorem

$$V(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

dla $R \in (0, 6)$.

Wyznacz długość promienia okręgu opisanego na podstawie tego z rozważanych ostrosłupów, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)