Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

POZIOM ROZSZERZONY

27 kwietnia 2024

Czas pracy: 180 minut

Zadanie 1 (2 pkt)

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{6n^3+n^2}{3n^2-1}-\frac{4n^3-3n^2}{2n^2+1}\right)^{-2}$.

ZADANIE 2 (2 PKT)

Wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + px + q$ można dwukrotnie podzielić bez reszty przez dwumian $(x+2)$. Oblicz p i q.

ZADANIE 3 (2 PKT)

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. Wykaż, że jeżeli okręgi o średnicach AB i CD są styczne zewnętrznie, to równoległobok $ABCD$ jest rombem.

ZADANIE 4 (3 PKT)

Liczby rzeczywiste x oraz y spełniają jednocześnie równanie $x+y=-2$ i nierówność

$$x^4+y^4+xy(x^3+y^3)\leqslant 0.$$

Wykaż, że $x=-1$ oraz $y=-1$.

ZADANIE 5 (3 PKT)

Prawdopodobieństwo wystąpienia awarii oświetlenia ulic w pewnym mieście w godzinach wieczornych pojedynczego dnia jest równe 0,2. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w okresie sześciu dni wystąpią co najwyżej trzy takie dni, w których nastąpi awaria oświetlenia ulic w tym mieście w godzinach wieczornych. Wynik podaj w ułamku dziesiętnym w zaokrągleniu do części setnych.

Zadanie 6 (4 pkt)

Rozwiąż równanie $2\cos 3x = 3\sin 2x$ w przedziale $[2023\pi, 2024\pi]$

ZADANIE 7 (4 PKT)

Dany jest nieskończony szereg geometryczny

$$2x - \frac{6x^2}{x-1} + \frac{18x^3}{(x-1)^2} - \frac{54x^4}{(x-1)^3} + \ldots$$

Wyznacz wszystkie wartości zmiennej x (różnej od 0 i od 1), dla których suma tego szeregu istnieje i jest różna od 0,3.

ZADANIE 8 (4 PKT)

Czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = 12$ i $|CD| = 13$, jest opisany na okręgu. Przekątna AC tego czworokąta tworzy z bokiem CD kąt, którego tangens jest równy $\frac{120}{119}$. Tangens kąta CDA jest równy $\frac{12}{5}$. Oblicz długość odcinka AB.

Zadanie 9 (4 pkt)

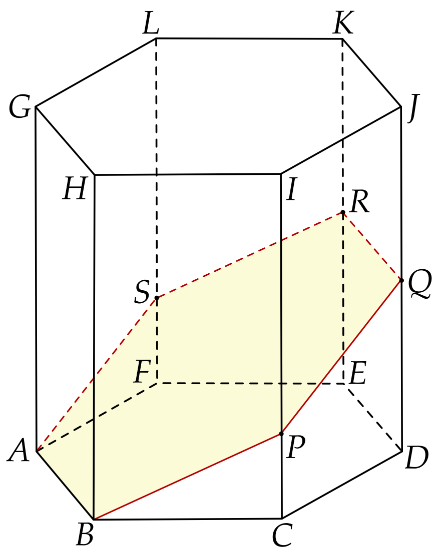
Ze zbioru liczb $\{1,2,3,\dots,n\}$, dla $n \geqslant 4$ losujemy bez zwracania dwie liczby a i b. Oblicz n jeżeli wiadomo, że prawdopodobieństwo tego, że wylosowane liczby a i b spełniają nierówność

$$|a-b| > 3$$

jest równe $\frac{50}{63}$.

ZADANIE 10 (5 PKT)

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym $ABCDEFGHIJKL$ płaszczyzna ABQ przechodzi przez krawędź AB i przez środek Q krawędzi DJ (zobacz rysunek).



Stosunek pola przekroju graniastosłupa płaszczyzną ABQ do pola jego podstawy jest równy $\frac{17}{8}$. Oblicz objętość graniastosłupa $ABCDEFGHIJKL$, jeżeli jego krawędź boczna ma długość b.

ZADANIE 11 (6 PKT)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = 4^{6\log_8 x - 0,5} + (\log 0,1^x)^3 + \frac{\log_3 \sqrt{5}}{\log_{243} 0,2} \cdot x^2 + 6x$$

dla każdej liczby $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

Zadanie 12 (5 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$mx^2 + (m-1)x + 2m - 3 = 0$$

ma dokładnie dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > -1.$$

ZADANIE 13 (6 PKT)

Rozważamy wszystkie proste na płaszczyźnie, które są jednocześnie styczne do wykresu funkcji homograficznej $y = \frac{2-x}{x-1}$ oraz do okręgu o równaniu $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 2$. Wyznacz równania tych spośród rozważanych prostych, których współczynniki kierunkowe są liczbami całkowitymi.