Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

Zestaw przygotowany przez serwis

zadania.info

POZIOM ROZSZERZONY

14 marca 2020

Czas pracy: 180 minut

Zadania zamknięte

Zadanie 1 (1 pkt)

Dla dowolnych liczb $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$ wartość wyrażenia

$$\left(\log_{\frac{1}{a}} b\right) \cdot \left(\log_{\frac{1}{b}} c\right) \cdot \left(\log_{\frac{1}{c}} a\right)$$

jest równa

A) abc B) $\frac{1}{abc}$ C) -1 D) 1

Zadanie 2 (1 pkt)

Zbiorem wartości funkcji $f(x) = \sin x + \cos x$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, jest przedział

A) $\langle -1, 1\rangle$ B) $\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}\rangle$ C) $\left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$ D) $\langle -2, 2\rangle$

Zadanie 3 (1 pkt)

Wiadomo, że wielomian $14x^5 - 127x^4 + 194x^3 + 138x^2 - 561x + 252$ ma w zbiorze $\left\{\frac{7}{3}, \frac{21}{5}, \frac{4}{7}, \frac{27}{2}\right\}$ dokładnie jeden pierwiastek wymierny. Jest nim liczba

A) $\frac{7}{3}$ B) $\frac{21}{5}$ C) $\frac{4}{7}$ D) $\frac{27}{2}$

Zadanie 4 (1 pkt)

Granica $\lim\limits_{x\to -3} \frac{9x-x^3}{x+3}$ jest równa

A) 0 B) -18 C) $+\infty$ D) -6

Zadanie 5 (1 pkt)

W okrąg o równaniu $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 4$ wpisano trójkąt równoramienny, w którym ramię tworzy z podstawą kąt o mierze 15°. Podstawa tego trójkąta ma długość

A) 1,5 B) $\sqrt{3}$ C) 3 D) $2\sqrt{3}$

Zadanie 6 (2 pkt)

Styczna do paraboli o równaniu $y = \sqrt{6}x^2 - 3$ w punkcie $P = (x_0, y_0)$ jest nachylona do osi Ox pod kątem 60°. Oblicz współrzędne punktu P.

Zadanie 7 (2 pkt)

Oblicz sumę nieskończonego szeregu geometrycznego

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{3}{5} + \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} - \frac{9}{25} + \frac{9\sqrt{3}}{25\sqrt{5}} - \frac{27}{125} + \frac{27\sqrt{3}}{125\sqrt{5}} - \dots$$

ZADANIE 8 (3 PKT)

Udowodnij, że jeżeli $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, to

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Zadanie 9 (3 pkt)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt M ($M \neq A$ i $M \neq C$), a na ramieniu BC wybrano punkt N. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T. Wykaż, że jeżeli $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$, to $|AM| = |CN|$.

ZADANIE 10 (4 PKT)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{5-4x}{3+2x^2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x, oraz dwie liczby: $0 > a > b > -\frac{1}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{f(a)}{|f(b)-f(a)|} - \frac{f(b)}{|f(a)-f(b)|}.$$

Zadanie 11 (4 pkt)

Liczby p i q są pierwiastkami równania $x^2 - 40x + 8 = 0$. Wykaż, że wartość wyrażenia $\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ jest liczbą naturalną.

ZADANIE 12 (4 PKT)

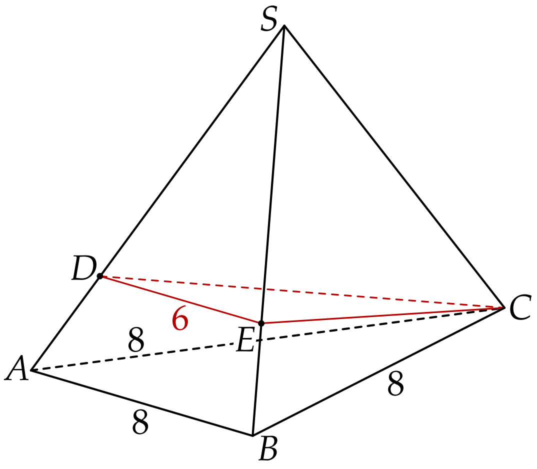
Doświadczenie losowe polega na tym, że losujemy bez zwracania trzy liczby ze zbioru $\{1,2,3,\ldots,89\}$. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych liczb jest liczba parzysta, jeżeli wiadomo, że pierwsza z wylosowanych liczb jest nieparzysta.

ZADANIE 13 (4 PKT)

Obrazem trójkąta ABC w jednokładności o środku $S=(1,-5)$ i skali -3 jest trójkąt KLM o wierzchołkach $K=(19,7)$, $L=(-2,13)$, $M=(13,-8)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta ABC.

Zadanie 14 (6 pkt)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości 8. Na krawędziach bocznych AS i BS wybrano punkty, odpowiednio D i E, takie że $|AD| = |BE|$ oraz $|DE| = 6$ (zobacz rysunek). Płaszczyzna CDE jest prostopadła do płaszczyzny ściany bocznej ABS ostrosłupa.



Oblicz objętość tego ostrosłupa.

ZADANIE 15 (6 PKT)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = 9bx^3 - ax^2 - 14bx + 15$ przez trójmian $(3x-2)^2$ wynosi 3. Oblicz a i b. Dla wyznaczonych wartości a i b rozwiąż nierówność $W(x) \leqslant 3$.

Zadanie 16 (7 pkt)

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne o ramionach długości 6. Oblicz cosinus kąta między ramionami tego z tych trójkątów, dla którego objętość bryły powstałej w wyniku obrotu trójkąta dokoła prostej zawierającej jego podstawę jest największa możliwa. Oblicz tę największą objętość.