ZADANIE 1

Podstawą trójkąta równoramiennego jest odcinek o końcach w punktach $A = (-2,-4)$ oraz $B = (-5,2)$. Jedno z jego ramion zawiera się w prostej o równaniu $y = x - 2$. Oblicz współrzędne trzeciego wierzchołka trójkąta.

ZADANIE 2

Podstawą graniastosłupa jest trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 8 cm, a jeden z kątów ma miarę 30°. Powierzchnia boczna tego graniastosłupa po rozwinięciu na płaszczyznę jest kwadratem. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego graniastosłupa.

ZADANIE 3

Rozwiąż równanie $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2x+13}{x+1}$.

ZADANIE 4

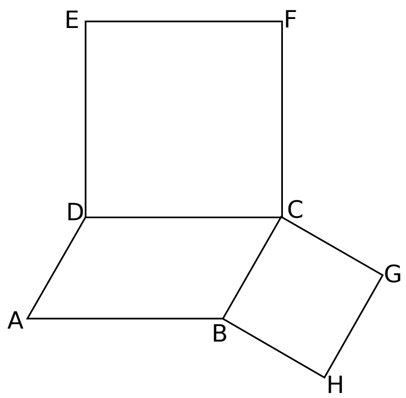
Pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ są tylko dwie liczby: 2 oraz (-3).

a) Oblicz a i b.

b) Zapisz wielomian w postaci czynników liniowych.

ZADANIE 5

Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $CDEF$ i $BCGH$ (zobacz rysunek).



Udowodnij, że $|AC| = |FG|$.

ZADANIE 6

W trapezie równoramiennym przekątna ma długość d i tworzy z dłuższą podstawą kąt o mierze α. Oblicz pole tego trapezu.

ZADANIE 7

Rozwiąż równanie $4\cos^2 x = 4\sin x + 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi)$.

ZADANIE 8
Danych jest osiem kul z numerami od 1 do 8, oraz dziesięć szuflad z numerami od 1 do 10. Rozmieszczamy w dowolny sposób kule w szufladach. Oblicz prawdopodobieństwa następujących zdarzeń:

a) A – wszystkie kule znajdą się w szufladach z numerami parzystymi.

b) B – dokładnie dwie szuflady pozostaną puste.

ZADANIE 9
Miary kątów trójkąta są w stosunku 1:2:3. Obwód koła opisanego na tym trójkącie jest równy 12π. Oblicz pole tego trójkąta.

ZADANIE 10
W trójkącie prostokątnym dany jest kąt ostry o mierze α i pole P tego trójkąta. Obliczyć długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

ZADANIE 11
Dany jest wielomian $W(x) = 8x^3 - 6x^2 + ax + b$. Jednym pierwiastkiem wielomianu jest prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej 2 razy orła w trzykrotnym rzucie monetą. Drugi pierwiastek jest równy prawdopodobieństwu wypadnięcia parzystej liczby oczek na każdej kostce w rzucie dwiema kostkami. Wyznacz trzeci pierwiastek wielomianu.

ZADANIE 12
Znajdź x, dla którego liczby $2, 2^{x+1}, 2^{x+1} + 6$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny.

ZADANIE 13
Rozwiąż nierówność

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} < 0.$$

ZADANIE 14
Dzienny dochód hurtowni akumulatorów wyraża się wzorem $f(x) = 0,25x^2 - 11x - 1950$, gdzie x oznacza liczbę sprzedanych akumulatorów.

a) Oblicz przy jakiej liczbie sprzedanych akumulatorów firma poniesie największą stratę. Oblicz wartość tej straty.

b) Oblicz ile akumulatorów należy sprzedać, aby dzienny dochód wynosił 4985.

ZADANIE 15
Rozwiąż równanie $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$.

ZADANIE 16
Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych i przez środek okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$.

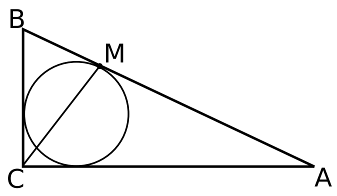
ZADANIE 17
Mały Antek założył zeszyt, w którym każdego dnia zapisuje jedną liczbę. Pierwszą zapisaną przez niego liczbą było 112, a każdego następnego dnia zmniejsza wpisywaną liczbę o 7.

a) Przez ile dni Antek wpisywał do zeszytu liczby, jeżeli wśród wpisanych liczb są liczby ujemne, a suma wszystkich liczb wynosi 805.

b) Ile liczb dodatnich jest wpisanych do zeszytu?

ZADANIE 18
Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest 2 razy dłuższa od krawędzi jego podstawy. Przez przekątną podstawy i środek rozłącznej z nią krawędzi bocznej poprowadzono płaszczyznę. Oblicz pole otrzymanego przekroju, wiedząc, że krawędź podstawy ostrosłupa ma długość a.

ZADANIE 19
Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $BC = 30$, $AC = 40$ i $AB = 50$. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AB w punkcie M. Oblicz długość odcinka CM.



ZADANIE 20
Rzucono dwiema sześciennymi kostkami do gry i określono zdarzenia
A – na każdej kostce wypadła nieparzysta liczba oczek,
B – suma wyrzuconych oczek jest nie mniejsza niż 8.
Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $A \cup B$.

ZADANIE 21
Wykres funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+3}{x+b+1}$ można otrzymać przesuwając wykres funkcji $g(x) = \frac{7}{x}$, a dziedzina funkcji $f(x)$ jest tym samym zbiorem co jej zbiór wartości. Wyznacz współczynniki a i b.

ZADANIE 22
Dany jest wielomian $W(x) = 10x^3 + 15x^2 + 7x + 1$.

a) Zapisz wielomian $W(x)$ jako iloczyn wielomianów liniowych.

b) Określ dziedzinę funkcji $f(x) = \log_3(-x) + \log_3\left(-\frac{W(x)}{x}\right)$.

ZADANIE 23

Odcinki AD i BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC, a punkt H jest punktem ich przecięcia. Uzasadnij, że punkty H, D, C i E leżą na jednym okręgu.

ZADANIE 24

Wiedząc, że $\log a = \frac{1}{2}$ i $\log b = -\frac{1}{3}$, oblicz $\log \sqrt{(ab)}$.

ZADANIE 25

Uzasadnij, że jeżeli n jest liczbą całkowitą to liczba $(n^2 - \sqrt{2}n + 1)(n^2 + \sqrt{2}n + 1)$ też jest liczbą całkowitą.