LICZBY ZESPOLONE

CZAS PRACY: 45 MIN.

ZADANIE 1 (5 PKT)

Zapisz liczbę $\frac{1-3i}{2+i}$ w postaci $a+bi$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$.

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\frac{1-3i}{2+i} = \frac{1-3i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{2-6i-i+3i^2}{4-i^2} = \frac{2-7i-3}{4+1} = \frac{-1-7i}{5}.$$

Odpowiedź: $-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$

ZADANIE 2 (5 PKT)

Rozwiąż w $\mathbb{C}$ układ równań $\begin{cases} iz_1+z_2=4+3i \\ iz_2+z_1=2i-1. \end{cases}$

ROZWIĄZANIE

Od pierwszego równania odejmujemy drugie pomnożone przez i (żeby skrócić z_1).

$$\begin{aligned} &iz_1+z_2-i^2z_2-iz_1=4+3i-2i^2+i \\ &2z_2=6+4i \quad\Rightarrow\quad z_2=3+2i. \end{aligned}$$

Z drugiego równania mamy

$$z_1=2i-1-iz_2=2i-1-3i-2i^2=1-i.$$

Odpowiedź: $(z_1,z_2)=(1-i,3+2i)$

ZADANIE 3 (5 PKT)

Wyznacz liczby zespolone z spełniające równanie $z+|z|=2+4i$.

ROZWIĄZANIE

Podstawiamy $z=a+bi$, gdzie $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+4i \\ &(a+\sqrt{a^2+b^2})+bi=2+4i. \end{aligned}$$

Części rzeczywiste i urojone po obu stronach muszą być równe, więc $b = 4$ oraz

$$\begin{aligned}
&a + \sqrt{a^2+16} = 2\\
&\sqrt{a^2+16} = 2 - a \quad /()^2\\
&a^2 + 16 = 4 - 4a + a^2\\
&4a = -12 \quad \Rightarrow \quad a = -3.
\end{aligned}$$

Zatem $z = -3 + 4i$.

Odpowiedź: $z = -3 + 4i$

Zadanie 4 (5 pkt)

Rozwiąż w $\mathbb{C}$ równanie: $z^3 - z^2 + 2 = 0$.

Rozwiązanie

Widać, że jedynym z pierwiastków jest $z = -1$. Dzielimy więc lewą stronę przez $(z+1)$.

$$z^3 - z^2 + 2 = (z^3 + z^2) - (2z^2 + 2z) + (2z + 2) = (z+1)(z^2 - 2z + 2).$$

Pozostało rozwiązać równanie kwadratowe

$$\begin{aligned}
&z^2 - 2z + 2 = 0\\
&\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2\\
&z = \frac{2-2i}{2} = 1 - i \quad \vee \quad z = \frac{2+2i}{2} = 1 + i.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $z \in \{-1, 1-i, 1+i\}$

Zadanie 5 (5 pkt)

Oblicz $(i - \sqrt{3})^{30}$.

Rozwiązanie

Zamieniamy liczbę $z = i - \sqrt{3}$ na postać trygonometryczną.

$$\begin{aligned}
&|z| = \sqrt{1+3} = 2\\
&\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\\
&z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Zatem na mocy wzoru de Moivre'a mamy

$$z^{30} = 2^{30}\left(\cos 30\cdot\frac{5\pi}{6} + i\sin 30\cdot\frac{5\pi}{6}\right) = 2^{30}(\cos 25\pi + i\sin 25\pi) = -2^{30}.$$

Odpowiedź: -2^{30}

ZADANIE 6 (5 PKT)

Oblicz $\sqrt[3]{i}$.

ROZWIĄZANIE

Zapisujemy i w postaci trygonometrycznej.

$$z = i = 0 + i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Zatem szukany pierwiastek składa się z trzech liczb.

$$z_0 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+0}{3} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 - i = -i$$

Odpowiedź: $\left\{-i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

Arkusz zadań znajdziesz na stronie
HTTP://WWW.ZADANIA.INFO/3735_2098