POCHODNE

CZAS PRACY: 45 MIN.

ZADANIE 1 (2 PKT)

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \frac{3x^2-5}{x+7}$.

ROZWIĄZANIE

Korzystamy ze wzoru

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

na pochodną ilorazu. Mamy zatem

$$f'(x) = \frac{6x\cdot(x+7) - (3x^2-5)\cdot 1}{(x+7)^2} = \frac{3x^2+42x+5}{(x+7)^2}.$$

Odpowiedź: $f'(x) = \frac{3x^2+42x+5}{(x+7)^2}$

ZADANIE 2 (2 PKT)

Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ w punkcie $x_0 = -2$.

ROZWIĄZANIE

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie x_0 jest równy $f'(x_0)$. W naszej sytuacji mamy

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$
$$f'(-2) = 12 + 20 + 7 = 39.$$

Odpowiedź: **39**

ZADANIE 3 (2 PKT)

Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 72x + 13$.

ROZWIĄZANIE

Liczymy pochodną.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 72 = 6(x^2 + x - 12)$$
$$\Delta = 1 + 48 = 49$$
$$x = \frac{-1-7}{2} = -4 \quad \vee \quad x = \frac{-1+7}{2} = 3$$
$$f'(x) = 6(x+4)(x-3).$$

Zatem funkcja $f(x)$ jest rosnąca w przedziałach $(-\infty, -4\rangle$ i $\langle 3, +\infty)$ (bo pochodna w tych przedziałach jest nieujemna), oraz jest malejąca w przedziale $\langle -4, 3\rangle$ (pochodna w tym przedziale jest niedodatnia).

Odpowiedź: **Rosnąca w** $(-\infty, -4\rangle$ **i** $\langle 3, +\infty)$ **, malejąca w** $\langle -4, 3\rangle$ **.**

ZADANIE 4 (2 PKT)

Wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 7$.

ROZWIĄZANIE

Obliczamy pochodną funkcji f .

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 = 12(x^3 - x^2 - x + 1) = 12(x^2(x-1) - (x-1)) =$$
$$= 12(x^2-1)(x-1) = 12(x+1)(x-1)^2.$$

W punkcie $x = -1$ pochodna zmienia znak z ujemnego na dodatni, więc jest minimum lokalne w tym punkcie. W punkcie $x = 1$ pochodna nie zmienia znaku, więc nie ma w tym punkcie ekstremum. Mamy ponadto

$$f(-1) = 3 + 4 - 6 - 12 - 7 = -18.$$

Odpowiedź: **Minimum lokalne:** $f(-1) = -18$ **.**

ZADANIE 5 (2 PKT)

Wyznacz najmniejszą możliwą wartość obwodu prostokąta o polu 9.

ROZWIĄZANIE

Jeżeli oznaczmy długość jednego z boków prostokąta przez x , to drugi bok (z podanego pola) ma długość $\frac{9}{x}$. Obwód prostokąta wyraża się więc wzorem

$$f(x) = 2x + \frac{18}{x}, \quad \text{gdzie } x > 0.$$

Liczymy pochodną

$$f'(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = \frac{2x^2-18}{x^2} = \frac{2(x-3)(x+3)}{x^2}.$$

Widać teraz, że funkcja f maleje w przedziale $(0,3\rangle$ i rośnie w przedziale $\langle 3,+\infty)$. Zatem najmniejszą wartość przyjmuje dla $x = 3$ i wartość ta jest równa

$$f(3) = 6 + 6 = 12.$$

Odpowiedź: **12**

Arkusz zadań znajdziesz na stronie
HTTP://WWW.ZADANIA.INFO/7872_5524